Aufgabe 7: Sei a Pol 1. Ord., d.h. $N(f) = -1$. Sei $\delta > 0$ hinreichend klein s.d. $B(a,\delta) \subset \Omega$ und $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$ die Laurententwicklung von f auf $B(a,\delta) \setminus \{a\}$. N.V. also

$$f(z) = \sum_{n \geq -1} a_n (z-a)^n, \quad z \in B(a,\delta) \setminus \{a\}.$$

$$(z-a) f(z) = \sum_{n \geq -1} a_n (z-a)^{n+1} = \sum_{n \geq 0} a_{n-1} (z-a)^n$$

für $z \in B(a,\delta) \setminus \{a\}$.

Also $\lim\limits_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} (z-a) f(z) = \lim\limits_{z \to a} \sum_{n \geq 0} a_{n-1} (z-a)^n \overset{\text{(normale Konv.)}}{=}$

a_{-1} $(\neq 0$ n.V.$)$.

Falls $\lim\limits_{z \to a} (z-a) f(z) \neq 0$, dann def

$$g : B(a,\delta) \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto g(z) := (z-a) f(z)$$

hat dann hebbare Sing. in a. Es gilt also, da $\lim\limits_{z \to a} g(z) \neq 0$, mit Eindeutigkeit der Laurentzerlegung und $N(g) = 0$: $N(f) = -1$.

Aufgabe 2 f, g haben bei z_0 Nst. k-ter Ordnung,

dann wähle $\delta > 0$ s.d. $\overline{B(z_0,\delta)} \subset \Omega$ und

$$f(z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylorentw.} \\ \text{von } f}}{=} \sum_{n \geq k} a_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^k \underbrace{\sum_{n \geq 0} a_{n+k} (z-z_0)^n}_{=:\, f_0(z)}$$

und f_0 ist holo. auf $B(z_0,\delta)$

Analog $g(z) = (z-z_0)^k \, g_0(z)$.

Dann gilt $\lim\limits_{z \to z_0} f_0(z) = a_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0$

$$\lim_{z \to z_0} g_0(z) = \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0$$

Wähle $\tilde{\delta} < \delta$ s.d. ~~$g|_{B(z_0,\delta)\setminus\{z_0\}} \neq 0$~~

$g(z) \neq 0$ für $z \in B(z_0,\tilde{\delta}) \setminus \{z_0\}$. Dann für solche z:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f_0(z)}{g_0(z)} \xrightarrow[(z \neq z_0)]{z \to z_0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k)}(z_0)}$$

Aufgabe 3 (i) Die Funktion $f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$ lässt sich lokal um 0 (z.B. $|z| < \frac{1}{2}$) als Potenzreihe (um 0) entwickeln: $f(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$.

Es gilt ($|z| < \frac{1}{2}$): $f(z) \cdot (1-z-z^2) = 1$, also

$$1 = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n z^n - \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n z^{n+1} - \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n z^{n+2}$$

$$= b_0 + (b_1 - b_0) z + \sum_{n\geq 2} z^n \left(b_n - (b_{n-1} + b_{n-2})\right)$$

Mit Eindeutigkeit der Koeff.'s von Taylorreihen analytische Funktionen folgt $b_n = a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$

(ii) Pol. $1-z-z^2$ hat Nullstellen $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$,

also $$\frac{1}{1-z-z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{z - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{z - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{z-\psi} - \frac{1}{z-\phi} \right) = (*)$$

mit $\phi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\psi = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

$$(*) = \frac{-1}{\sqrt{5}\,\psi} \frac{1}{1-\frac{z}{\psi}} + \frac{1}{\sqrt{5}\,\phi} \frac{1}{1-\frac{z}{\phi}} =$$

(z klein genug)
$$\frac{-1}{\sqrt{5}\,\psi} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{z}{\psi}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}\,\phi} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{z}{\phi}\right)^n$$

Also $$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{1}{\sqrt{5}\,\phi} \frac{1}{\phi^n} - \frac{1}{\sqrt{5}\,\psi} \frac{1}{\psi^n} \right) z^n$$ (z klein genug)

und Koeff.' vergl.: $$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\phi^{n+1}} - \frac{1}{\psi^{n+1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \frac{\psi^{n+1} - \phi^{n+1}}{\phi^{n+1}\,\psi^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

Aufgabe 4 (i) Es gilt $f_\omega(-\frac{1}{z}) = f_\omega(z)$ und

$f_{-\omega}(-z) = f_\omega(z)$

Also $f_\omega(-\frac{1}{z}) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} J_\nu(\omega)\left(-\frac{1}{z}\right)^\nu = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} J_{-\nu}(\omega)(-1)^\nu z^\nu$

und $f_{-\omega}(-z) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} J_\nu(-\omega)(-1)^\nu z^\nu$

und Beh. folgt mit Eind. d. Laurentkoeff.'s

(ii) Wähle Weg $\gamma(t) = e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. Dann

$$J_\nu(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\exp\left(\frac{\omega}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)}{z^{\nu+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\omega\sin(t)}}{e^{it(\nu+1)}}\, ie^{it}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\omega\sin(t)-\nu t)}\,dt$$

Wähle nun Weg $\tilde{\gamma}(t) = e^{-it}$, $t\in[0,2\pi]$, dann

$$J_\nu(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(\omega\sin(t)-\nu t)}\,dt$$

Also $J_\nu(\omega) = \frac{1}{2}\left(J_\nu(\omega) + J_\nu(\omega)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\nu t-\omega\sin t)\,dt$

(iii) Mit normaler Kgz. d. auftretenden Reihen gilt ($\gamma = e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$)

$$J_\nu(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\exp\left(\frac{\omega}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)}{z^{\nu+1}}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z^{\nu+1}}\left(\sum_{k\geq 0}\left(\frac{\omega z}{2}\right)^k\frac{1}{k!}\sum_{l\geq 0}\left(-\frac{\omega}{2z}\right)^l\frac{1}{l!}\right)dz =$$

$$= \sum_{k,l\geq 0}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(-1)^l\left(\frac{\omega}{2}\right)^{k+l}}{k!\,l!}\, z^{k-l-\nu-1}\,dz =$$

$$= \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \frac{(-1)^l \left(\frac{\omega}{2}\right)^{2l+v}}{l!(v+l)!}$$

d) Da die Taylorreihe von J_v normal kgt ist (auf $\mathbb{C}$) können Reihe und Ableitungen vertauscht werden.