Übungsblatt 7 zu Funktionentheorie

Aufgabe 1: Wir wollen das Schwarzsche Lemma beweisen. Sei $f : B(0,1) \to B(0,1)$ eine holomorphe Funktion mit Null als Fixpunkt: $f(0) = 0$. Dann gilt für alle $z \in B(0,1)$ die Ungleichung $|f(z)| \leq |z|$.
Tipp: Entwickeln Sie f als Taylorreihe um die 0 und konstruieren Sie, durch herrausziehen eines Faktors z^1, eine Hilfsfunktion g mit $g(0) = f'(0)$. Wenden Sie nun das Maximumsprinzip geeignet auf die Funktion g an.

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Funktionen F aus Aufgabe 1 von Blatt 3 bis auf Drehungen die einzigen konformen (holomorph und bijektiv, mit holomorpher Umkehrfunktion) Abbildungen des Einheitskreises $B(0,1)$ auf sich sind.

(i) Sei $f : B(0,1) \to B(0,1)$ eine bijektive Funktion sodass f und ihre Umkehrfunktion f^{-1} holomorph sind. Gilt $f(0) = 0$, dann existiert eine komplexe Zahl ξ mit $|\xi| = 1$, sodass

$$f(z) = \xi z \qquad \text{für alle } z \in B(0,1).$$

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 1.

(ii) Sei $f : B(0,1) \to B(0,1)$ eine bijektive Funktion sodass f und ihre Umkehrfunktion f^{-1} holomorph sind. Dann existieren eine komplexe Zahl ξ mit $|\xi| = 1$ und ein Punkt $a \in B(0,1)$, sodass

$$f(z) = \xi \frac{z - a}{\overline{a}z - 1} \qquad \text{für alle } z \in B(0,1).$$

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe leiten wir die komplexe Poissondarstellung (1) für Funktionen auf dem Einheitsball her.

(i) Zeigen Sie, dass es keinen Identitätssatz für den Realteil einer holomorphen Funktion geben kann: Finden Sie ein Beispiel einer analytischen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sodass $\operatorname{Re} f(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(z) = 0$, aber $f \neq 0$.

(ii) Sei $f : \overline{B(0,1)} \to \mathbb{C}$ stetig sowie auf $B(0,1)$ holomorph. Dann gilt für $z \in B(0,1)$

$$f(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \big[\operatorname{Re} f(e^{i\theta})\big] \mathrm{d}\theta. \tag{1}$$

Tipp: Leiten Sie für die Koeffizienten a_n, $n \in \mathbb{N}_0$, der Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt 0 die folgenden Formeln her:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \big[\operatorname{Re} f(e^{i\theta})\big] e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta, \ (n \geq 1), \qquad a_0 = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big[\operatorname{Re} f(e^{i\theta})\big] \mathrm{d}\theta.$$

Aufgabe 4: In der Vorlesung haben Sie das Maximumsprinzip für beschränkte Mengen kennengelernt. Ziel der Aufgabe ist es, Maximumsprinzipien für unbeschränkte Mengen zu beweisen. Ein Beispiel für die Anwendung eines solchen Maximumsprinzips ist Aufgabe 2 auf Übungsblatt 6.
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ stetig. Für das Paar Ω, f gilt dann das Maximumsprinzip, falls

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| = \sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)|. \tag{2}$$

(i) Zeigen Sie, dass das Maximumsprinzip für unbeschränkte Gebiete im allgemeinen nicht gilt, d.h.: Finden Sie $\Omega \subset \mathbb{C}$ mit $\partial\Omega \neq \emptyset$ und $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ stetig, mit f holomorph auf Ω, sodass das Maximumsprinzip für das Paar Ω, f nicht gilt.

(ii) Ein Maximumsprinzip: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ stetig, mit f holomorph auf Ω. Falls

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in\overline{\Omega}}} |f(z)| = 0$$

gilt, dann ist f auf $\overline{\Omega}$ beschränkt und (2) gilt.

(iii) Eine allgemeine Methode: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ stetig, mit f holomorph auf Ω. Angenommen es gibt eine Funktion $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ stetig, mit g holomorph auf Ω, sodass

- $\operatorname{Re} g \geq 0$ auf $\overline{\Omega}$,
- $\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in\overline{\Omega}}} \operatorname{Re} g(z) = \infty$.

Falls f auf $\partial\Omega$ beschränkt ist und für alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante C_ε existiert, sodass für alle $z \in \overline{\Omega}$

$$|f(z)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon \operatorname{Re} g(z)}$$

gilt, dann ist f auf $\overline{\Omega}$ beschränkt und (2) gilt.

(iv) Eine Anwendung der Methode: Sei $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \in (0,1)\}$ und $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ stetig, mit f holomorph auf Ω. Falls f auf Ω beschränkt ist, dann gilt (2).
Wenn Sie wollen, können Sie auch die folgende stärkere Version zeigen: Die Beschränktheit von f auf Ω kann ersetzt werden durch die Wachstumsbedingung: Es gibt Konstanten C, α mit $\alpha < \pi$ sodass $|f(z)| \leq \exp(A \exp(\alpha|z|))$ für $z \in \Omega$.
Tipp: Betrachten Sie auf der Menge $\Omega' := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \in (-1/2, 1/2)\}$ *die Funktion* $z \to e^{i\beta z} + e^{-i\beta z}$ *für geeignetes* β.

Abgabe je Zweiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 1.06.2016.