Aufgabe 1: Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ Potenzreihe um $0 \in B(0,1)$, mit Kgz-Radius 1.

Da $f(0) = a_0 = 0$ ist

$$g: B(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

holomorph auf $B(0,1)$ [g analytisch mit Reihendarstellung $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n$].

Da $|f(z)| < 1$ für $z \in B(0,1)$ gilt

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r} \text{ für } z \in \partial B(0,r)$$

Mit Max-Prinzip also

$$\sup_{z \in B(0,r)} |g(z)| = \sup_{z \in \partial B(0,r)} |g(z)| \leq \frac{1}{r}, \text{ d.h.}$$

mit $r \to 1$: $\underbrace{\sup_{z \in B(0,1)} |g(z)|}_{= \sup_{z \in B(0,1)} \frac{|f(z)|}{|z|}} \leq 1$

Aufgabe 2: a) Nach Aufgabe 1 gilt ($f(0) = 0$)

$|f(z)| \leq |z|$ und $|z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)|$.

Insges. also $|f(z)| = |z|$ für alle $z \in B(0,1)$.

D.h. die Fkt. g aus Aufgabe 1 nimmt ihr Maximum in $B(0,1)$ an, also (Max-Prinzip) g konstant:

Es gibt ein $\xi \in \mathbb{C}$: $g(z) = \xi = \frac{f(z)}{z}$ $z \in B(0,1) \setminus \{0\}$. N.V. $|f(z)| = |z|$ gilt $|\xi| = 1$,

d.h. $f(z) = \xi z$ für ein $\xi \in \mathbb{C}$ mit $|\xi| = 1$.

b) Setze $a := \varphi^{-1}(0)$. Dann setze

$$\varphi_a : B(0,1) \longrightarrow B(0,1)$$
$$z \longmapsto \varphi_a(z) := \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$$

(vgl. Blatt 3, Aufg. 1).

Es gilt $(\varphi \circ \varphi_a)(0) = \varphi\left(\cancel{\frac{\varphi_a(0)-a}{\bar{a}\varphi_a(0)-1}}\right)$

$= \varphi\left(\frac{-a}{-1}\right) = \varphi(a) = (\varphi \circ \varphi^{-1})(0) = 0$

Also gilt: $\varphi \circ \varphi_a : B(0,1) \longrightarrow B(0,1)$ ist holo., bij. mit holo. Umkehrabbildung.

Nach a) gibt es $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| = 1$, sd. $(\varphi \circ \varphi_a)(z) = \xi z$ $(z \in B(0,1))$

Nach Blatt 3, Aufg. 1 gilt $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$, was die Beh. liefert.

Aufgabe 3 (i) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) := iz$

ist ganze Fkt. mit $\operatorname{Re} f(z) = 0$

für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(z) = 0$.

(ii) f ist holomorph in $B(0,1)$, d.h.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ mit Kgz-Radius } 1.$$

Für $r<1$ gilt für die Koeff's:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \frac{1}{r^n e^{in\theta}} d\theta.$$

Da f auf $\overline{B(0,1)}$ stetig (und also glm. stetig) folgt mit $r \nearrow 1$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{1}{e^{in\theta}} d\theta. \quad (*)$$

Die Reduktion auf den Realteil Re f von f folgt ähnlich wie in Aufg. 4 auf Blatt 6.

Da $z \to f(z) z^{n-1}$ holomorph auf $B(0,1)$ ist, gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) z^{n-1} dz = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta} r) e^{in\theta} r^n d\theta = 0$$

für $r<1$, also (mit Begr. wie oben)

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta = 0 \quad (**)$$

(*) und (**) zusammen ergeben

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta \qquad (n \geq 1)$$

Für $n=0$ gilt:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{i\theta})\, d\theta$$

$$+ \frac{i}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{Im} f(e^{i\theta})\, d\theta}_{\substack{= 2\pi \operatorname{Im} f(0) \\ \text{(Mittelwerteigenschaft)}}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{i\theta})\, d\theta + i \operatorname{Im} f(0)$$

Insgesamt: $f(z) \overset{(1)}{=} i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{i\theta}) \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-in\theta}\right] d\theta$

$$\overset{(2)}{=} i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{i\theta}) \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\theta$$

$\underline{1,,="}$: Vertauschbarkeit v. Taylorreihe und „$\int$"

$\underline{2,,="}$: $1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-in\theta} = \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}$

für $z \in B(0,1)$ und $\theta \in [0,2\pi)$ (geom. Reihe)

Aufgabe 4: (i) z.B. $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$, und

$$f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) := e^{z}.$$

Dann f stetig, holomorph auf Ω.

- $$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| \geq \sup_{\substack{z \in \mathbb{C}: \\ \mathrm{Re}(z) > 0 \\ \mathrm{Im}(z) = 0}} |e^{z}| = \infty$$

- $$\sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)| = \sup_{y \in \mathbb{R}} |e^{iy}| = 1$$

(ii) n.V. ist f auf $\overline{\Omega}$ beschränkt.

Sei $R > 0$ bel., fest, und

$\Omega_R := \{z \in \Omega : |z| < R\} = \Omega \cap B(0,R)$.

Dann gilt für den Rand $\partial\Omega_R$ von Ω_R:

$$\partial\Omega_R = \underbrace{\left(\partial\Omega \cap B(0,R)\right)}_{\partial^{(1)}\Omega_R} \cup \underbrace{\{z \in \overline{\Omega} : |z| = R\}}_{\partial^{(2)}\Omega_R}.$$

Es gilt: • $$\lim_{R \to \infty} \left(\sup_{x \in \partial^{(2)}\Omega_R} |f(z)| \right) = 0$$

• Das Maximumprinzip der U. ist auf die Fkt. $f_R := f|_{\Omega_R}$ anwendbar (da Ω_R beschränkt).

$$\sup_{z \in \Omega_R} |f(z)| = \sup_{z \in \partial\Omega_R} |f(z)| \leq$$

$$\leq \max \left(\sup_{z \in \partial^{(1)}\Omega_R} |f(z)| , \sup_{z \in \partial^{(2)}\Omega_R} |f(z)| \right)$$

~~Ast~~ Also, mit $R \to \infty$,

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| = \lim_{R \to \infty} \sup_{z \in \Omega_R} |f(z)| \leq \sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$$

(iii) Wir wenden Teilaufgabe (ii) auf eine geeign. Hilfsfunktion an:

Für $\varepsilon > 0$ sei $h_\varepsilon : \bar{\Omega} \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto h_\varepsilon(z) := f(z) e^{-\varepsilon g(z)}$,

dann gilt:

- h_ε holomorph auf Ω
- h_ε stetig (auf $\bar{\Omega}$)
- $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ z \in \bar{\Omega}}} |h_\varepsilon(z)| = 0$ $(*)$

$(*)$ $|h_\varepsilon(z)| = |f(z) e^{-\varepsilon g(z)}| \leq |C_{\frac{\varepsilon}{2}} e^{\frac{\varepsilon}{2} g(z)} e^{-\varepsilon g(z)}|$

$= C_{\frac{\varepsilon}{2}} e^{-\mathrm{Re}(g(z)) \frac{\varepsilon}{2}} \xrightarrow[z \in \bar{\Omega}]{z \to \infty} 0$, denn

$\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ z \in \bar{\Omega}}} \mathrm{Re}\, g(z) = \infty$.

Wir können also Teilaufgabe (ii) auf h_ε anwenden, es gilt $|h_\varepsilon(z)| \leq \sup\limits_{z \in \Omega} |h_\varepsilon(z)| = \sup\limits_{z \in \partial\Omega} |h_\varepsilon(z)| =$

$$= \sup_{z \in \partial\Omega} |f(z) e^{-\varepsilon g(z)}|$$

$$= \sup_{z \in \partial\Omega} \Big(|f(z)| \underbrace{e^{-\mathrm{Re}\, g(z)}}_{\leq 1 \text{ n.V.}} \Big)$$

$$\leq \sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$$

~~Da~~ Insgesamt also: $|f(z)e^{-\varepsilon g(z)}| \leq \sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$ für alle $z \in \Omega$.

Da $|f(z)e^{-\varepsilon g(z)}| \xrightarrow{\varepsilon \to 0} |f(z)|$, gilt

$|f(z)| \leq \sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$ für alle $z \in \Omega$.

f ist auf Ω also beschränkt (f auf $\partial\Omega$ beschränkt n.V., d.h. $\sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)| < \infty$)

und es gilt $\sup_{z \in \Omega} |f(z)| \leq \sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$ (**)

Da f stetig ist, gilt $\sup_{z \in \Omega} |f(z)| = \sup_{z \in \bar\Omega} |f(z)|$, und „$\geq$" in (**) gilt also.

(iv) Die Voraussetzung, dass f auf $\partial\Omega$ beschränkt ist, ist ziemlich suboptimal!

Es reicht $|f(z)| \leq e^{A\exp(\alpha|z|)}$ für Konstanten A, α mit $\alpha < \pi$. ~~d.h. ein bisschen~~

Zum Beweis: Wähle als Fkt. g z.B.

$g(z) = e^{iz} + e^{-iz}$, $z \in \bar\Omega$

Dann $(\mathrm{Re}\, g)(z) = e^{-\mathrm{Re}(z)} + e^{\mathrm{Re}(z)} \geq 0 \quad \forall z \in \bar\Omega$

und $\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \bar\Omega}} (\mathrm{Re}\, g)(z) = \infty$.

Da f beschränkt ist folgt die Beh. mit

$C_\varepsilon := \sup_{z \in \bar\Omega} |f(z)|$.

[Um die stärkere Aussage (mit Wachstumsbed. an f) zu zeigen, betr. Ω' wie im Tipp und wähle $\beta \in (\alpha, \pi)$.]