Aufgabe 1: (i) $\frac{1}{(z-w)(z-y)} = \frac{1}{w-y}\left(\frac{1}{z-w} - \frac{1}{z-y}\right)$, also

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)\,dz}{(z-w)(z-y)} = \frac{1}{w-y} \int_{|z|=R} \frac{f(z)\,dz}{z-w} - \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-y}\,dz =$$

$$= \frac{1}{w-y} 2\pi i \; f(w) - f(y) \quad \text{für } R \text{ groß genug.}$$

Für $R \geq 2\max\{|w|,|y|\}$ gilt dann

$$|f(w) - f(y)| = \frac{|w-y|}{2\pi} \left| \int_{|z|=R} \frac{f(z)\,dz}{(z-w)(z-y)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{4|w-y|R}{R^2} \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

(ii) Es gilt (Tutorienblatt 3, Aufg. 1)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt, \text{ also}$$

$$\underbrace{2\pi \int_0^r d\tilde{r}\; \tilde{r}\; f(z_0)}_{= r^2\pi f(z_0)} = \int_0^r d\tilde{r} \int_0^{2\pi} dt\; \tilde{r}\; f(z_0 + \tilde{r}e^{it}) \overset{\text{„Kugelkoord.“ (TRAFO)}}{=} \int_{B(z_0,r)} f(w)\,dw.$$

$$|f(z_0) - f(w_0)| = \frac{1}{r^2\pi} \left| \int_{B(z_0,r)} f(w)\,dw - \int_{B(w_0,r)} f(w)\,dw \right|$$

$$\leq \frac{\|f\|_\infty}{r^2\pi} \left( \underbrace{|B(z_0,r) \setminus B(w_0,r)|}_{=(*)} + |B(w_0,r) \setminus B(z_0,r)| \right)$$

$(*) = |B(z_0,r)| - |B(z_0,r) \cap B(w_0,r)| = r^2\pi - |B(z_0,r) \cap B(w_0,r)|$

Angenommen $|B(z_0,r) \cap B(w_0,r)| \frac{1}{r^2\pi} \xrightarrow{r\to\infty} 1$, dann

$|f(z_0) - f(w_0)| \leq (\ldots) \xrightarrow{r\to\infty} 0$

Bleibt also z.z.: $|B(z_0,r) \cap B(w_0,r)| \frac{1}{r^2\pi} \xrightarrow{r\to\infty} 1$

Es gilt $B(z_0, r-|z_0-w_0|) \subset B(z_0,r) \cap B(w_0,r)$ (für $r > |z_0-w_0|$). Also

$$\frac{1}{r^2\pi} |B(z_0,r) \cap B(w_0,r)| \geq B(z_0, r-|z_0-w_0|) \frac{1}{r^2\pi} = \overbrace{\frac{(r-|z_0-w_0|)^2}{r^2}}^{\xrightarrow{r\to\infty} 1}$$

$$\leq B(z_0,r) \frac{1}{r^2\pi} = 1.$$

Aufgabe 2: Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $g_\lambda(z) := f(z) e^{\lambda z}$ für $z \in \overline{S}$. Dann ist $g_\lambda$ holo in $S$ und

$$|g_\lambda(z)| = |f(z)| \, e^{\lambda \operatorname{Re}(z)} \leq |f(z)|,$$

also $g_\lambda$ beschränkt (und stetig per Def.) auf $\overline{S}$. Das Max Prinzip für $S$ ist also auf die Fkt. $g_\lambda$ anwendbar und liefert

$$M_t(g_\lambda) \leq \max\{M_0(g_\lambda), M_1(g_\lambda)\}.$$

Es gilt

$$M_t(g_\lambda) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |g_\lambda(t+iy)| = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(t+iy)| \, e^{\lambda t} =$$

$$= e^{\lambda t} M_t(f)$$

Also $M_t(f) \leq \max\{e^{-\lambda t} M_0(f), e^{(1-t)\lambda} M_1(f)\}$. $(*)$

- Falls $M_0, M_1 \neq 0$ wähle $\lambda \in \mathbb{R}$ s.d. $e^\lambda = \frac{M_0}{M_1}$.
- Falls $M_0 = M_1 = 0$, dann folgt die Beh. direkt aus dem Max Prinzip für $S$.
- Falls $M_0 = 0$ oder $M_1 = 0$, ~~betra~~ wähle für $\varepsilon > 0$ $\lambda \in \mathbb{R}$ s.d. $e^\lambda = \frac{\varepsilon}{M_1}$ bzw. $e^\lambda = \frac{M_0}{\varepsilon}$ und betr. $\varepsilon \searrow 0$ in $(*)$.

Aufgabe 3 Betr. die Fortsetzung $\tilde{\rho}(z) := \begin{cases} \rho(z) & z \in \overline{B(0,1)} \\ \frac{1}{\overline{\rho(\bar{z})}} & z \in (\overline{B(0,1)})^c \end{cases}$

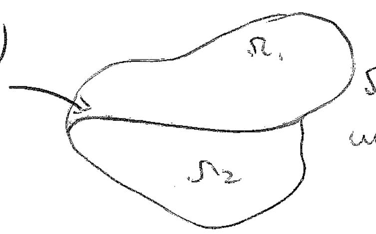
$\tilde{\rho}$ stetig in $\mathbb{C}$, holo. auf $\mathbb{C} \setminus \partial B(0,1)$. Angenommen $\tilde{\rho}$ holo auf ganz $\mathbb{C}$, dann nach Satz v. Liouville ($\tilde{\rho}$ beschränkt, da $\rho(z) \neq 0$ für alle $z \in \overline{B(0,1)}$. Da $\overline{B(0,1)}$ kpkt: $\exists \varepsilon > 0 : \forall z \in \overline{B(0,1)} : |\rho(z)| \geq \varepsilon$)

$\tilde{\rho}$ konstant, folgl. $\rho$ konstant.

Bleibt also z.z., dass $\tilde{\rho}$ auf $\partial B(0,1)$ komplex diff'bar ist (im Sinne von komplex diff'bar für $z_0 \in \partial B(0,1)$, als Fkt. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$)

[ Vgl. „Spiegelungsprinzip" auf letztem Blatt. Beides Spezialfälle des (zumindest hier) informellen Prinzips:

Bild $(\gamma)$




Kurve trennt $\Omega$ in $\Omega_1$ und $\Omega_2$

$g$ holo auf $\Omega_1$ und $\Omega_2$ und stetig auf $\Omega$, sowie $\gamma$ eine genügend reguläre Kurve. Dann $g$ holo. auf $\Omega$ ]

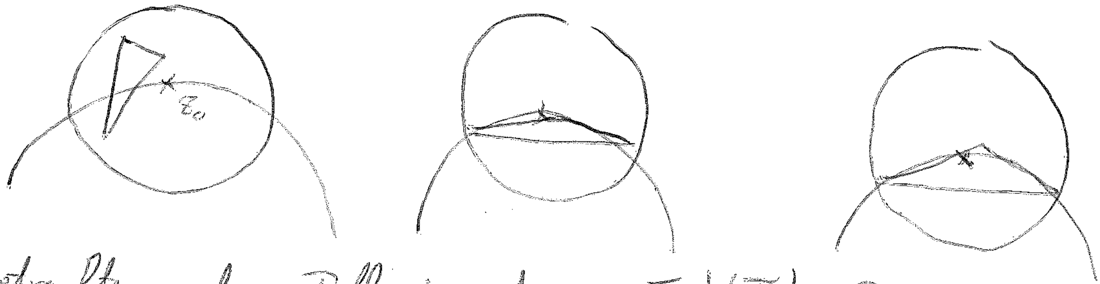
Betr. also $z_0 \in \partial B(0,1)$. $\tilde{\rho}$ holo in $z_0$ falls $\tilde{\rho}|_{B(z_0,\frac{1}{2})}$ holo. ist. O.E. $z_0 = (0,1)$. Wir verwenden dann d. Satz von Morera, wollen also zeigen, dass für Dreiecke $T$ mit $\overline{T} \subset B(z_0, \frac{1}{2})$ gilt: $\int_{\partial T} \tilde{\rho}(z)\,dz = 0$.

Wie für das Spiegelungsprinzip betrachten wir die Fälle ($\Omega_1 := B(z_0,\frac{1}{2}) \cap B(0,1)$, $\Omega_2 := B(z_0,\frac{1}{2}) \cap \overline{B(0,1)}^c$)

- $\overline{T} \subset \Omega_1$ bzw. $\overline{T} \subset \Omega_2$ (nichts zu tun)
- $\overline{T} \subset \Omega_1 \cup \partial B(z_0,\frac{1}{2})$ bzw $\overline{T} \subset \Omega_2 \cup \partial B(z_0,\frac{1}{2})$

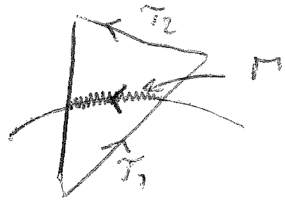
Betrachte dann entspr. Verschiebung $\gamma \pm i\varepsilon$ (wir haben o.E. $z_0 = (0,1)$ gewählt) und Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$

- $\gamma \cap \Omega_1, \gamma \cap \Omega_2 \neq \emptyset$




betrachten den Fall in dem $\mathrm{Int}(\gamma) \cap \Omega_1$, $\mathrm{Int}(\gamma) \cap \Omega_2$ zusammenhängend sind ($\mathrm{Int}(\gamma)$ das innere der Kurve $\gamma$)

Zerlegen $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ in Kurven mit $\mathrm{Bild}(\gamma_1) \subset \overline{\Omega_1}$, $\mathrm{Bild}(\gamma_2) \subset \overline{\Omega_2}$, a, b die Anfangs-/Endpunkte von $\gamma_1$ bzw. $\gamma_2$.




$\Gamma$ die Parametrisierung des Abschnitts von $\partial B(0,1)$ in $\mathrm{Int}(\gamma)$.

Dann gilt für die Kurven $\overbrace{\gamma_1 + \Gamma}^{=:\varphi_1}$, $\overbrace{\gamma_2 + (-\Gamma)}^{=:\varphi_2}$

- $\varphi_1, \varphi_2$ geschlossene Kurven in $B(z_0, \frac{1}{2})$
- $\varphi_1 \subset \overline{\Omega_1}$, $\varphi_2 \subset \overline{\Omega_2}$ und

$$\int_{\varphi_i} f(z)\,dz = 0,$$

denn wie beim Spiegelungsprinzip können wir (vgl. auch oben) die Kurven $\varphi_i$ approximieren durch $\varphi_{i,\varepsilon} := \varphi_i \pm i\varepsilon$ ($z_0 = (0,1)$!), $\varphi_{i,\varepsilon} \subset \Omega_i$, also $\int_{\varphi_{i,\varepsilon}} f(z)\,dz = 0$.

- $\int_\Gamma f(z)\,dz + \int_{-\Gamma} f(z)\,dz = 0$ ($f$ stetig auf $\partial B(0,1)$)

Insges. also: $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Aufgabe 4 (i) o. E. können wir $f(0) = 0$ annehmen:

Falls die Schranke für $g$ mit $g(z) = f(z) - f(0)$ gilt, dann auch für $f$.

n.V. gilt $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz$

Es gilt: (i) $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi R^k} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} d\varphi \quad (k \geq 1)$

(ii) $0 = \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \, d\varphi \quad (k=0, f(0) = 0)$

(iii) $0 = \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) e^{ik\varphi} \, d\varphi \quad \left( \underset{\text{analytisch}}{z \to f(z) z^{k-1}} \right)$

Also: Für $\theta \in [0, 2\pi)$ s.d. $f^{(k)}(0) = |f^{(k)}(0)| e^{i\theta}$

$$|f^{(k)}(0)| \frac{R^k 2\pi}{k!} \overset{(iii)}{=} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \left(e^{-ik\varphi - i\theta} - e^{ik\varphi + i\theta}\right) d\varphi$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \cos(k\varphi + \theta) \, d\varphi$$

$$\underset{\left(\text{linke Seite } \underline{\underline{\text{reell}}}\right)}{=} 2 \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) \cos(k\varphi + \theta) \, d\varphi$$

$$\leq 2 \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} f(Re^{i\varphi})| \, d\varphi$$

$$\overset{(ii)}{=} 2 \int_0^{2\pi} \left( |\operatorname{Re} f(Re^{i\varphi})| + \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) \right) d\varphi$$

$$\leq 4 \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}),$$

denn $|x| + x = 2 \max\{x, 0\}$.

(ii) Da $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\exists$ ganze Fkt. $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s.d. $f = e^g$.

Die Annahme liefert dann

$$\operatorname{Re} g(z) \leq \log(A) + B|z|^\alpha$$

Wie in Aufgabe 7 auf Blatt 5, aber mit der verbesserten Abschätzung ~~auf~~ aus (i) folgern wir: $g$ ist Polynom vom Grad $\deg(g) \leq \alpha$