Übungsblatt 5 zu Funktionentheorie

Aufgabe 1:
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion (d.h. holomorph auf ganz $\mathbb{C}$). Falls es Konstanten $C, \alpha > 0$ gibt mit

$$|f(z)| \leq C\,(|z| + 1)^{\alpha} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

dann ist f ein Polynom von Grad $\deg(f) \leq \alpha$.
Tipp: Adaptieren Sie den Beweis vom Satz von Liouville geeignet.

Aufgabe 2:
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und für $n \in \mathbb{N}$ holomorphe Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ gegeben. Falls die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen eine Funktion $f : \Omega \to C$ konvergiert, dann ist die Grenzfunktion f ebenfalls holomorph.
Tipp: Verwenden Sie das Lemma von Goursat und den Satz von Morera.

Aufgabe 3:
In dieser Aufgabe wollen wir das *Schwarzsche Spiegelungsprinzip* beweisen. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und Achsensymmetrisch zur x-Achse, d.h. $z \in \Omega \iff \overline{z} \in \Omega$. Wir definieren dann die Mengen

$$\begin{aligned} \Omega^{\pm} &:= \{z \in \Omega : \ \pm\mathrm{Im}(z) > 0\}, \\ I &:= \{z \in \Omega : \ \mathrm{Im}(z) = 0\}. \end{aligned}$$

Sei nun $\Omega = \Omega^+ \cup I \cup \Omega^-$ wie oben und $f : \Omega^+ \cup I$ eine stetige Funktion sodass $f|_{\Omega^+}$ holomorph ist und $\mathrm{Im}(f(z)) = 0$ für alle $z \in I$ gilt. Dann existiert eine holomorphe Funktion $F : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $F|_{\Omega^+} = f$.
Tipp: Man kann überlegen, dass ein möglicher Kandidat $F : \Omega \to \mathbb{C}$ für eine holomorphe Fortsetzung gegeben ist durch

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & \textit{für } z \in \Omega^+ \cup I \\ \overline{f(\overline{z})} & \textit{für } z \in \Omega^- \end{cases}.$$

Dass die so definierte Funktion F tatsächlich analytisch ist können Sie zum Beispiel mit dem Satz von Morera beweisen.

Aufgabe 4:
In der letzten Aufgabe wollen wir exemplarisch Funktionen $f : \Omega \to X$ betrachten, wo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und X ein n-dimensionaler ($n < \infty$) $\mathbb{C}$-Vektorraum ist. Ähnlich wie bei Resultaten der Integrationstheorie lassen sich viele Resultate über harmonische Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ direkt auf vektorwertige Funktionen $f : \Omega \to X$ übertragen. Für die Aufgabe erinnern wir an die folgenden zwei Aussagen: (i) Auf endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorräumen Normäquivalenz gilt. Topologische Aussagen auf X beziehen sich in der folgenden Aufgabe auf die über eine Norm auf X induzierten Topologie. (ii) Lineare Abbildungen $\phi : X \to \mathbb{C}$ sind stetig.
Wir nennen eine Funktion $f : \Omega \to X$

(i) holomorph in Ω, falls für alle $z_0 \in \Omega$ der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

in X existiert.

(ii) schwach holomorph in Ω, falls für alle $\mathbb{C}$-linearen Funktionen $\phi : X \to \mathbb{C}$ die Funktion $\phi \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

(a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to X$. Zeigen Sie, dass f genau dann holomorph in Ω ist wenn f schwach holomorph in Ω ist.

(b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $\overline{B(0,1)} \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass für eine schwach analytische Funktion $f : \Omega \to X$ die Cauchysche Integralformel auf X gilt: Für $z_0 \in B(0,1)$ gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z := \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z_0} \gamma'(t) \, \mathrm{d}t, \tag{1}$$

wo $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma(t) := e^{it}$ ist. Das Integral auf der rechten Seite von (**??**) können Sie hier als vektorwertiges Riemann-Integral interpretieren.
Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass das Integral auf der rechten Seite von (**??**) *wohldefiniert ist. Argumentieren Sie dann, dass für lineare Funktionen $\phi : X \to \mathbb{C}$ gilt:*

$$\phi\left(\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z_0} \gamma'(t) \, \mathrm{d}t\right) = \int_0^{2\pi} \frac{(\phi \circ f)(\gamma(t))}{\gamma(t) - z_0} \gamma'(t) \, \mathrm{d}t.$$

(c) Beweisen Sie folgende Aussage: Sei Y ein n-dimensionaler ($n < \infty$) $\mathbb{C}$-Vektorraum und $A : Y \to Y$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ sodass $A - \lambda \, \mathrm{id}_Y$ nicht invertierbar ist (d.h. das Spektrum von A ist nicht leer).
Tipp: Angenommen $A - \lambda \, \mathrm{id}_Y$ sei für jedes λ invertierbar. Beweisen und verwenden Sie dann für beliebige λ, μ und lineare $\phi : X \to \mathbb{C}$ die Formel

$$\frac{\phi\left((A - \lambda \, \mathrm{id}_Y)^{-1}\right) - \phi\left((A - \mu \, \mathrm{id}_Y)^{-1}\right)}{\lambda - \mu} = \phi\left((A - \lambda \, \mathrm{id}_Y)^{-1}(A - \mu \, \mathrm{id}_Y)^{-1}\right).$$

Ohne Beweis können Sie verwenden, dass $\lim_{|\lambda| \to \infty} \phi\left((A - \lambda \, \mathrm{id}_Y)^{-1}\right) = 0$ gilt.