Aufgabe 1: Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ gilt n.V.

$$f^{(n)}(z_0) = \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz .$$

Also $$|f^{(n)}(z_0)| \le \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0+re^{i\varphi})|}{|re^{i\varphi}|^{n+1}}\, |ire^{i\varphi}|\, d\varphi =$$

$$\le \frac{2\pi}{r^n} \sup_{z \in \partial B(z_0,r)} |f(z)| \le C 2\pi \frac{(r+1)^\alpha}{r^n} \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

falls $\alpha < n$. Setze $\gamma := \{k \in \mathbb{N}_0 : k < \alpha\}$, dann $f^{(\gamma)}(z_0) = 0 \ \forall z_0 \in \mathbb{C}$, d.h. f Polynom (*) von höchstens Grad$(f) = \gamma < \alpha$

[Für $f'(z) = 0$ gilt nach V. $f(z) = c$ für $c \in \mathbb{C}$; für $f'(z) = c_1$ gilt $f(z) = c_1 z + c_2$ (betrachte $f' = c_1$ als DGl. auf $\mathbb{C}$) und per Induktion dann (*)]

Aufgabe 2: Sei $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$ s.d. $\overline{B(z_0,r)} \subset \Omega$. Sei T Dreieck mit $\overline{T}$ in $B(z_0,r)$. Dann gilt (n.V., f_n holo.) $\int_{\partial T} f_n(z)\, dz = 0$ (für $n \in \mathbb{N}$).

Da $f_n \to f$ glm. auf Ω ist f stetig und Satz 17 der V. ist anwendbar. Wir wollen also $\int_{\partial T} f(z)\, dz$ zeigen. Das folgt ebenfalls aus glm. Kgz.:

(Konstante die vom T abhängt)

$$\left| \int_{\partial T} f_n(z)\, dz - \int_{\partial T} f(z)\, dz \right| \le C_T \sup_{z \in B(z_0,r)} |f_n(z) - f(z)|$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Aufgabe 3: Mit den CR-DGL sieht man, dass

$$F: \Omega \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto F(z) := \begin{cases} f(z) & z \in \Omega^+ \cup I \\ \overline{f(\bar{z})} & z \in \Omega^- \end{cases}$$

auf (Ω^+ und) Ω^- holomorph ist.

Bleibt also z.z., dass F für Punkte $z_0 \in I$ komplex diff'bar ist.

→ Verwende Satz v. Morera (Satz 17 der VL).

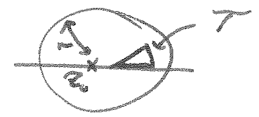
Sei $z_0 \in I$ und $r > 0$ sd. $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$ und T Dreieck mit $T \subset B(z_0, r)$

Wollen zeigen: $\int_T F(z)\, dz = 0$.

Folgende Fälle können auftreten:

(i) $T \subset \Omega^+$ oder $T \subset \Omega^-$: $\int_T F(z)\, dz = 0$ da F holo. auf $\Omega^\pm$.

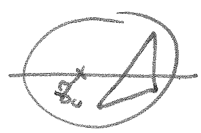
(ii) $T \cap I \neq \emptyset$, $\mathrm{Int}(T) \cap I = \emptyset$



Betrachte geeign. „Approximation" T_ε mit $T_\varepsilon \subset \Omega^+$ (w.l.o.g.). Dann $\int_{T_\varepsilon} F(z)\, dz = 0$ (siehe (i))

und $\int_{T_\varepsilon} F(z)\, dz \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \int_T F(z)\, dz$

(iii) $T \cap \Omega^+, T \cap \Omega^- \neq \emptyset$



Zerlege dann T in Dreiecke die in den Fällen (i) und (ii) behandelt wurden.

Das Kurvenintegral über das ursprüngl. Dreieck ist dann die Summe der Kurvenintegrale der kleineren Dreiecke („innere" Kanten heben sich weg, vgl. Beweis Satz 77 der VL.)

Aufgabe 4 a) X ist (als Vektorraum) isomorph zu $\mathbb{C}^n$; d.h. können o.E. annehmen: $X = \mathbb{C}^n$.

Beh. folgt dann im Grunde aus „Kgz in $\mathbb{C}^n \iff$ komponentenweise Kgz"

Details: Sei f holo (in $\mathbb{C}^n$) in Ω und $z_0 \in \Omega$.

Dann für $\phi : X \to \mathbb{C}$ lin (also stetig) und h klein genug:

$$\underbrace{\phi\left(\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}\right)}_{\xrightarrow{h\to 0} f'(z_0)} = \frac{(\phi\circ f)(z_0+h) - (\phi\circ f)(z_0)}{h}$$

Da ϕ stetig ist ex. der Grenzwert und $\phi\circ f$ ist bei z_0 kompl. diff'bar

Sei f schwach holo. Für $i = 1, \dots, n$ sind die Abb. $\Phi_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \mapsto \Phi_i\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} := z_i$ lin. und n.V. $\Phi_i \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ holo.

Da $(\Phi_i \circ f)(z) = (f(z))_i$ gilt $f = \sum_{i=1}^n e_i \underbrace{(\Phi_i \circ f)}_{\text{holo}}$

wo e_i der i-te Einheitsvektor ist.

b) Die Fkt. $h : [0, 2\pi] \to X$
$$t \mapsto h(t) := \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z_0}\,\gamma'(t)$$

ist stetig und beschränkt (bzgl. einer Norm $\|\cdot\|_X$ auf X). Die zweite Beh. folgt aus der Stetigkeit von $f : \Omega \to X$ (f holo, vgl. Beweis für Funktionen $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holo aus VL.).

Das Riemann-Integral ist also wohldef. und
per Def. d. Riemann-Integrals gilt

$$\phi\left(\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z_0}\gamma'(t)\,dt\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{(\phi\circ f)(\gamma(t))}{\gamma(t)-z_0}\gamma'(t)\,dt =$$

$$\underset{\text{holo}}{\overset{\phi\circ f}{=}} \int_\gamma (\phi\circ f)(z)\,dz = (\phi\circ f)(z_0) = \phi(f(z_0)).$$

Gilt für alle $\phi: X \to \mathbb{C}$ lin, also gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z_0}\gamma'(t)\,dt = f(z_0)$$

als Gleichheit in X (eine der Stellen, wo für $\dim(X)=\infty$ mehr investiert werden muss!)

c) Ang. die Formel gilt. Da
$\mathrm{Lin}(Y,Y) := \{M : Y \to Y \text{ linear}\}$ ein $\mathbb{C}$-VR
($\dim = \dim(Y)^2$) ist, und $GL(Y) \to \mathrm{Lin}(Y,Y)$, $M \mapsto M^{-1}$
stetig ($GL(Y) \subset \mathrm{Lin}(Y,Y)$ invertierbare lin Abb),
ist also $\phi((A-\lambda)^{-1})$ als Fkt. in λ
stetig für $\phi : \mathrm{Lin}(Y,Y) \to \mathbb{C}$ linear, und
auch $\lambda \to \phi((A-\lambda)^{-1}(A-\mu)^{-1})$ stetig.

D.h. der Grenzwert $\lambda \to \mu$ von
$\frac{1}{\lambda-\mu}\left(\phi((A-\lambda)^{-1}) - \phi((A-\mu)^{-1})\right)$
ex. und folgl. $\lambda \to \phi((A-\lambda)^{-1})$ diff'bar bei
$\mu \in \mathbb{C}$. Da $\mu \in \mathbb{C}$ bel. war, ist die Fkt.
ganz.
Aus Stetigkeit und $\lim_{|\lambda|\to\infty} \phi((A-\lambda)^{-1}) = 0$ folgt
dass die Fkt. beschränkt ist.

Also Liouville anwendbar und $\lambda \to \phi((A-\lambda)^{-1})$ konstant, $\phi((A-\lambda)^{-1}) = c \in \mathbb{C}$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

Da $\lim_{|\lambda| \to \infty} (\_) = 0$ muss $c = 0$ gelten.

Insgesamt gilt für alle $\phi : \mathcal{L}(Y,Y)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\phi((A-\lambda)^{-1}) = 0.$$

Also ($\dim(\mathcal{L}(Y,Y)) < \infty$ geht hier ein)

$(A-\lambda)^{-1} = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, was absurd ist.