Übungsblatt 4 zu Funktionentheorie

Aufgabe 1:

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Zeigen Sie dann folgende Implikationen:

(i) Ω ist konvex $\Rightarrow \Omega$ ist sternförmig

(ii) Ω ist sternförmig $\Rightarrow \Omega$ ist einfach zusammenhängend

(iii) Ω ist einfach zusammenhängend $\Rightarrow \Omega$ ist zusammenhängend

(b) Seien $\Omega, \Omega' \in \mathbb{C}$ einfach zusammenhängende Gebiete wobei $\Omega \cap \Omega'$ nicht-leer und zusammenhängend ist. Zeigen Sie, dass dann auch $\Omega \cup \Omega'$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist.

(c) Entscheiden Sie, ob folgende Gebiete konvex, sternförmig, einfach zusammenhängend oder zusammenhängend sind:

$$\mathbb{C} \setminus \{0\}; \quad \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+; \quad \mathcal{B}(z_0, r) \text{ wobei } z_0 \in \mathbb{C}, r > 0;$$
$$\mathcal{B}\left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup \mathcal{B}\left(1, \frac{1}{2}\right) \cup \left\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \frac{1}{10}\right\}$$

Aufgabe 2:
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass dann folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) f hat eine Stammfunktion

(ii) Für jede geschlossene $\mathcal{C}^1$-Kurve γ in Ω gilt:

$$\int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = 0$$

(iii) Für jede $\mathcal{C}^1$-Kurve γ in Ω hängt $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ nur vom Anfangs- und Endpunkt von γ ab.

Aufgabe 3:
Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cos(ax) e^{-x^2} \mathrm{d}x$$

für beliebige $a > 0$.
Tipp: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \left(z + \frac{ia}{2}\right)^2 e^{-z^2}$ und berechnen Sie das Integral $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ über einen geeigneten Weg γ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 4:
Sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein nicht-konstantes Polynom n-ten Grades, d.h.

$$p(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0 \quad \text{mit} \quad a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C},\ n \geq 1,\ a_n \neq 0$$

(a) Sei $\rho := \max\left\{1, \frac{2}{|a_n|} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right\}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq \rho$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\frac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq \frac{3}{2}|a_n||z|^n$$

Bemerkung: Daraus folgt, dass alle Nullstellen von p (falls vorhanden) in $\mathcal{B}(0, \rho)$ liegen.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass p mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat.
Tipp: Nehmen Sie an das p keine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat und betrachten sie die Funktion $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $q(z) = a_n z^{n-1} + ... + a_1$. Zeigen Sie zunächst, dass für alle $z \neq 0$ gilt $\frac{1}{z} = \frac{q(z)}{p(z)} + \frac{a_0}{zp(z)}$ und berechnen Sie das Integral über eine geeignete, geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$.

Abgabe je Zweiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 11.05.2016 in der Zentralbung oder in dem Abgabekasten im ersten Stock, Theresienstrae 31.