(1) ÜB4

(a) Beh.: Sei $\emptyset \neq \Omega \overset{\subset \mathbb{C}}{}$ ~~offen~~ ~~zusammenh.~~ Gebiet. Dann gilt

(i) Ω konvex $\Rightarrow$ Ω sternförmig

(ii) Ω sternförmig $\Rightarrow$ Ω einfach zusammenhängend

(iii) Ω einfach zusammenh. $\Rightarrow$ Ω zusammenhängend

Bew: (i) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet

$\Rightarrow \forall z_1, z_2 \in \Omega$, $0 \leq t \leq 1$ gilt $z(t) = t z_1 + (1-t) z_2 \in \Omega$

$\Rightarrow$ Fixiere ein beliebiges Zentrum $z_0 \in \Omega$ dann liegt die Verbindungsgerade zu einem bel. Punkt $z \in \Omega$ komplett in Ω

$\Rightarrow$ Ω sternförmig

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet

$\Rightarrow \forall z \in \Omega$ $\exists z_0 \in \Omega : \{z_0 + t(z - z_0) : t \in [0,1]\} \subset \Omega$

Sei nun $\gamma : [0,1] \to \Omega$, $u \to \gamma(u)$ eine Schleife in Ω und $T : [0,1] \to \Omega$, $\lambda \to T(\lambda) = \gamma(u) + \lambda(z_0 - \gamma(u))$

~~ist~~ in Ω (da Ω sternförmig) und stetig

$\Rightarrow$ γ ist nullhomotop und da γ bel. war ist Ω einfach zusammenh.

(iii) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenh. Gebiet

$\Rightarrow$ Jede bel. Schleife γ in Ω ist nullhomotop

~~Angenommen $\exists\, \Omega_1, \Omega_2 \neq \emptyset$ offen, sodass $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, (d.h. Ω nicht zusammenh.)~~

~~$\Rightarrow$ Ω ist nicht bogenweise zusammenh.~~

~~$\Rightarrow$ $\lightning$~~

Da Ω ein Gebiet ist, folgt Ω zusammenh.

(b)

Beh: Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ zwei einfach zusammenh. Gebiete, ~~mit~~ wobei $\Omega \cap \Omega' \neq \emptyset$ und zusamm. dann ist $\Omega \cup \Omega'$ auch einf. zusammenh.

Bew: Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ einf. zus. Gebiete, $\Omega \cap \Omega' \neq \emptyset$ zus.

$\Rightarrow$ $\Omega \cup \Omega' \subset \mathbb{C}$ offen (ver. von offenen Mengen) und bogenweise zus., da für $z_1 \in \Omega$ $z_2 \in \Omega'$ existiert $z_0 \in \Omega \cap \Omega'$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow [z_1, z_0] \subset \Omega \text{ (da } \Omega \text{ bog. zus.)} \\ [z_0, z_2] \subset \Omega' \text{ (da } \Omega' \text{ bog. zus.)} \end{array}\right\} \Rightarrow [z_1, z_2] \subseteq \Omega \cup \Omega'$$

$\Rightarrow$ $\Omega \cup \Omega'$ zusammenh. $\Rightarrow$ $\Omega \cup \Omega'$ Gebiet und jede Schleiße ist nullhomotop da ~~bo~~ $\Omega \cup \Omega'$ bogenweise zus.

1 (c) ÜB4

(i) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist zusammenhängendes Gebiet (nicht mehr)

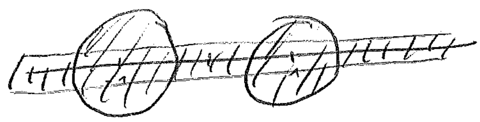
(ii) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$ ist sternförmig, aber nicht konvex

(iii) $B(z_0, r)$ ist konvex $\forall z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$

(iv) $A = B(-1, \frac{1}{2}) \cup B(1, \frac{1}{2}) \cup \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \frac{1}{10}\} \subset \mathbb{R}$

ist offen, zusammenh.

$\Rightarrow$ einfach zusammenh., aber nicht sternförmig



2 **Beh:** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet

$f: \Omega \to \mathbb{C}$ stetig

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent: ÜB 4

~~Bew: „a ⇒ b":~~ (a) f hat eine Stammfunktion

(b) Sei γ eine geschlossene $\overset{\text{glatte}}{C^1}$-Kurve in ~~$\mathbb{C}$~~ Ω

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

(c) Sei $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}\ \Omega$ eine C^1-Kurve in Ω

$t \to \gamma(t)$

$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz$ hängt nur von $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ ab.

Bew: „(a) ⇒ (b)": Satz 10 (ii) aus VL

„(b) ⇒ (c)": Seien α und β 2 Kurven mit den gleich Anfangs- und Endpunkten, also

$\alpha: [a,b] \to \Omega$ $\qquad \alpha(a) = \beta(a)$

$\beta: [c,b] \to \Omega$ $\qquad$ und $\alpha(b) = \beta(b)$

Sei $b = c$ (o.E.d.A., da β durch $t \to \beta(t+c-b)$, $b \le t \le (d-c)+b$ ersetzt werden kann)

$$\overset{(b)}{\Longrightarrow} 0 = \int_\alpha f(z)\,dz - \int_\beta f(z)\,dz$$

„(c) $\Rightarrow$ (a)": Sei $z^* \in \Omega$, Betrachte

$$F(z) := \int_{z^*}^{z} d\xi\, f(\xi)$$ ~~ds~~ entlang einer Kurve in Ω.

(c) $\Rightarrow F(z)$ hängt nicht ~~von der~~ vom Weg ab

Beh: $F' = f$

Bew: Sei $z_0 \in \Omega$ (fixiert, aber bel.)

Ω offen $\Rightarrow \exists \rho > 0 : B(z_0, \rho) \subset \Omega$

Sei $z \in B(z_0, \rho) \subset \Omega$

$$\Rightarrow F(z) = \int_{z^*}^{z} f(\xi)\, d\xi = \underbrace{\int_{z^*}^{z_0} f(\xi)\, d\xi}_{= F(z_0)} + \underbrace{\int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi'}_{\text{berechne entlang}}$$

berechne entlang $\gamma_{z_0,z} : [0,1] \to \Omega$, $t \to z_0 + t(z - z_0)$

$$\Rightarrow F(z) - F(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\,(z - z_0)\, dt$$

$$= f(z_0)(z - z_0) + \underbrace{\int_{\gamma_{z_0,z}} \big(f(\xi) - f(z_0)\big)\, d\xi}_{=: r(z)}$$

f ist stetig $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \delta < \rho$ und ~~$|z - z_0| < \delta$~~

$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \;\; \forall z \in \Omega$ mit $|z - z_0| < \delta$

$$\Rightarrow \frac{|r(z)|}{|z - z_0|} \leq \varepsilon \Rightarrow F \text{ komplex diffbar in } z_0 \quad F'(z_0) = f(z_0)$$

$\square$

[3] * Sei $a > 0$: ÜB 4

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cos(ax) e^{-x^2} dx = \operatorname{Re} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{iax} e^{-x^2} dx}_{=: I(a)}$$

* Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, $R > 0$

$$z \to \left(z + \frac{ia}{2}\right)^2 e^{-z^2}$$

$\gamma_1 := [-R, R]$, $\gamma_2 := [R, R - i\frac{a}{2}]$, $\gamma_3 := [R - \frac{ia}{2}, -R - \frac{ia}{2}]$, $\gamma_4 := [-R - \frac{ia}{2}, -R]$

und $\gamma = \sum_{i=1}^{4} \gamma_i$

$$* \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{-R}^{R} \left(x + \frac{ia}{2}\right)^2 e^{-x^2} dx$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx - Re^{-R^2} \xrightarrow[R \to \infty]{} \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{4}\right)$$

$$* \int_{\gamma_3} f(z) dz = \int_{R}^{-R} x^2 e^{-(x - \frac{ia}{2})^2} dx = -e^{\frac{a^2}{4}} \int_{-R}^{R} x^2 e^{iax} e^{-x^2} dx$$

$$\xrightarrow[R \to \infty]{} e^{-\frac{a^2}{4}} I(a)$$

$$* \left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \leq \frac{a}{2} \sup_{t \in [0, \frac{a}{2}]} \left| \left(R - it + \frac{ia}{2}\right)^2 e^{-(it + R)^2} \right|$$

$$\leq \frac{a}{2} e^{\frac{a^2}{4}} \left(R^2 + \frac{a^2}{4}\right) e^{-R^2} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

$$* \quad \left| \int_{\gamma_4} f(z)\, dz \right| \leq \frac{a}{2} \sup_{t \in [0, \frac{a}{2}]} \left| \left(-R - it + \frac{ia}{2}\right)^2 e^{-(it-R)^2} \right|$$

$$\leq \frac{a}{2} e^{\frac{a^2}{4}} \left(R^2 + \frac{a^2}{4}\right) e^{-R^2} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

$$* \quad \int_{\gamma} f(z)\, dz = 0 \quad , \text{ da } f \text{ holomorph}$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz \right| \leq a e^{\frac{a^2}{4}} \left(R^2 + \frac{a^2}{4}\right) e^{-R^2} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \left| \int_{-R}^{R} x^2 e^{iax} e^{-x^2} dx - \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{4}\right) e^{-\frac{a^2}{4}} \int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx \right| \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow I(a) = \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{4}\right) e^{-\frac{a^2}{4}} \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cos(ax) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{4}\right) e^{-\frac{a^2}{4}}$$

Fkt ÜB4

$\boxed{4}$

(a) <u>Beh:</u> Sei p ein Polynom n-ten Grades (nicht konst.), d.h

$$p(z) = a_n z^n + \dots + a_0 \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{C},\ i = 0, \dots, n,\ n \geq 1,\ a_n \neq 0.$$

Sei $\rho := \max\left\{1, \frac{2}{|a_n|} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right\}$. Dann gilt $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq \rho$

$$\frac{1}{2} |a_n| |z|^n \leq |p(z)| \leq \frac{3}{2} |a_n| |z|^n \quad (*)$$

<u>Bew:</u> Um $(*)$ zu zeigen, zeigen wir

$$\underbrace{|p(z) - a_n z^n|}_{} \leq \frac{1}{2} |a_n| |z|^n \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq \rho$$

$\cancel{\Leftrightarrow \left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i\right|}$ Es genügt also zu zeigen, dass

$$\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| |z|^i \leq \frac{1}{2} |a_n| |z|^n \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq \rho$$

(Da dann mit Dreiecksungl. $(*)$ folgt)

* <u>Fall 1</u>: $1 \geq \frac{2}{|a_n|} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \overset{(**)}{\Rightarrow} \rho = 1$

Sei $z \in \mathbb{C}$: $|z| \geq \rho = 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| |z^i| \leq |z|^n \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|}_{\overset{(**)}{\leq} \frac{|a_n|}{2}} \leq \frac{1}{2} |a_n| |z|^n$$

* <u>Fall 2</u>: $1 < \frac{2}{|a_n|} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \overset{(**)}{\Rightarrow} \rho = \frac{2}{|a_n|} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| > 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| |z|^i = |z|^n \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \underbrace{|z|^{\overset{i-n<0}{i-n}}}_{\leq \rho^{i-n} < \frac{1}{\rho}} < \frac{1}{\rho} |z|^n \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|}_{\frac{1}{2}|a_n|\rho} = \frac{1}{2} |a_n| |z|^n \quad \square$$

$\Rightarrow$ Korrolar: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine NST von p

$$\Rightarrow |z_0| < \varrho$$

Beh: $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ hat eine NST in $\mathbb{C}$

Bew: * Angenommen $p(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$

Dann gilt für $z \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{P(z)}{z P(z)} = \frac{z Q(z) + a_0}{z P(z)} = \frac{Q(z)}{P(z)} + \frac{a_0}{z P(z)} \quad (*)$$

wobei $Q(z) = a_n z^{n-1} + \dots + a_1$

* Sei $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \to R e^{it}$, $R > 0$

$$\Rightarrow 2\pi i = \int_\alpha \frac{1}{z} \, dz = \underbrace{\int_\alpha \frac{Q(z)}{P(z)} \, dz}_{A_1} + a_0 \underbrace{\int_\alpha \frac{1}{z P(z)} \, dz}_{A_2}$$

* $A_1 = 0$ da $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$ holomorph falls $P(z) \neq 0$

* $$|A_2| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{i R e^{it}}{R e^{it} P(R e^{it})} \, dt \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{|P(R e^{it})|} \, dt$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{1}{2} |a_n| R^n} \, dt = \frac{4\pi}{|a_n|} \frac{1}{R^n} \quad \text{für } R > \varrho \text{ (siehe (a))}$$

$$\xrightarrow[R \to \infty]{} 0 \Rightarrow \lightning$$

$\square$