Übungsblatt 3 zu Funktionentheorie

Aufgabe 1:

(a) Seien $z, w \in \mathbb{C}$, sodass $\overline{z}w \neq 1$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right| < 1 \qquad \text{für} \qquad |z|, |w| < 1$$

und ausserdem, dass gilt:

$$\left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right| = 1 \qquad \text{für} \qquad |z| = 1 \quad \text{oder} \quad |w| = 1$$

Hinweis: Warum kann angenonmen werden, dass z reell ist? Es genügt dann zu zeigen, dass $(r-w)(r-\overline{w}) \leq (1-rw)(1-r\overline{w})$ mit Gleichheit für passende $r, |w|$, erfüllt ist.

(b) Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe um den Ursprung in der komplexen Ebene. Zeigen Sie, dass für fixierte $w \in \mathbb{D}$, die Funktion

$$F : z \to \frac{w-z}{1-\overline{w}z}$$

folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) F bildet die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ auf sich selbst ab (d.h. $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$) und ist holomorph.

(ii) F vertauscht 0 und w, d.h. $F(0) = w$ und $F(w) = 0$.

(iii) $|F(z)| = 1$ für $|z| = 1$

(iv) $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ist bijektiv. (*Hinweis: Berechen Sie $F \circ F$*)

Aufgabe 2:
Seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$ und $f : B(z_0, \rho) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass für genügend kleine $\epsilon > 0$ gilt:

$$\int_{|z-z_0|=\epsilon} \frac{1}{f(z)} \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}$$

Aufgabe 3:
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein offen und einfach zusammenhängend. Sei ausserdem $f = u + iv$ eine in Ω holomorphe Funktion, sodass f' stetig ist. Sei $\gamma : [a, b] \to \Omega$ ein geschlossener $\mathcal{C}^1$-Weg. Man zeige mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Gleichungen, dass

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$$

Aufgabe 4:

(a) Berechnen Sie folgendes Integral

$$\int_\gamma z^n \mathrm{d}z$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$, wobei γ ein beliebiger Kreis um $z = 0$ (gegen den Uhrzeigersinn) ist.

(b) Berechnen Sie das Integral aus Teilaufgabe (a) erneut, wobei γ nun ein beliebiger Kreis in $\mathbb{C}$ ist, der den Punkt $z = 0$ nicht enthält.

(c) Sei $|a| < r < |b|$ und sei γ ein Kreis (gegen den Uhrzeigersinn) um $z = 0$ mit Radius r. Zeigen Sie, dass dan gilt:

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-a)(z-b)}\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{a-b}$$

Abgabe je Zweiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 04.05.2016 in der Zentral-bung.