1 (a)

~~Wenn~~ Angenommen es gilt

$$\left|\frac{w-r}{1-\bar{w}r}\right| \leq 1 \quad \forall w \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R} \text{ mit } |w|, |r| \leq 1$$

$$\underset{\varphi \in \mathbb{R}}{\overset{w = ve^{-i\varphi}}{\Longrightarrow}} \left|\frac{ve^{-i\varphi}-r}{1-\bar{v}re^{i\varphi}}\right| \underset{z=re^{i\varphi}}{=} \left|\frac{v-z}{1-\bar{v}z}\right| \leq 1 \quad \forall v, z \in \mathbb{C} \text{ mit } |v|, |z| \leq 1$$

Es genügt also die Relation für $z = r \in \mathbb{R}$ mit $|r| \leq 1$ zu zeigen. Sei nun $w \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$ mit $|w|, |r| \leq 1$

$$\Rightarrow (1-r^2) \geq 0, \quad |w|^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow (1-r^2)|w|^2 \leq 1-r^2 \quad (*)$$

$$\Rightarrow r^2 + |w|^2 - 2r\,\mathrm{Re}(w) \leq 1 + r^2|w|^2 - 2r\,\mathrm{Re}(w)$$

$$\Rightarrow (r-w)(r-\bar{w}) \leq (1-rw)(1-r\bar{w})$$

$$\Rightarrow \left|\frac{r-w}{1-r\bar{w}}\right| \cdot \left|\frac{r-\bar{w}}{1-rw}\right| \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{w-r}{1-r\bar{w}}\right| \leq 1 \quad (**)$$

wobei „=" nur bei $|w|=1$ (siehe $(*)$) oder $|r|=1$ möglich ist.

(b) $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, Sei $w \in \mathbb{D}$

$$F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$$
$$z \to \frac{w-z}{1-\bar{w}z}$$

(i) Beh: $F: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph

Bew:

* Sei $\omega, z \in \mathbb{D}$: $|F(z)| = \left|\frac{\omega - z}{1-\bar{\omega}z}\right| \underset{(a)}{<} 1$ („<" da $\omega, z \in \mathbb{C}$)

$$\Rightarrow F: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

* Seien $\omega, z \in \mathbb{D}$ und $h \in \mathbb{C}$ mit $|h|$ klein genug, sodass $z+h \in \mathbb{D}$, dann gilt

$$\frac{F(z+h) - F(h)}{h} = \frac{w-(z+h)}{h(1-\bar{w}(z+h))} - \frac{\omega - z}{h(1-\bar{\omega}z)}$$

$$= \frac{w - z|w|^2 + \bar{w}z(z+h) - (z+h) + |w|^2(z+h) - \bar{w}z(z+h) - w + z}{h(1-\bar{\omega}(z+h))(1-\bar{\omega}z)}$$

$$= \frac{|w|^2 - 1}{(1-\bar{w}(z+h))(1-\bar{\omega}z)} \xrightarrow{h \to 0} \frac{|w|^2-1}{(1-\bar{w}z)^2} \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

$\Rightarrow F$ holomorph auf $\mathbb{D}$ $\square$

(ii) Sei $\omega \in \mathbb{D}$ $\Rightarrow$ $F(0) = \frac{\omega - 0}{1} = \omega$

$$F(\omega) = \frac{\omega - \omega}{\underbrace{1-|\omega|^2}_{\neq 0}} = 0$$

(iii) Beh: $F: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ist bijektiv

Bew: Sei $z \in \mathbb{D}$, $\omega \in \mathbb{D}$

$$\Rightarrow F(F(z)) = F\left(\frac{\omega - z}{1-\bar{\omega}z}\right)$$

$$= \frac{\omega - \frac{\omega - z}{1-\bar{\omega}z}}{1 - \bar{\omega}\frac{\omega - z}{1-\bar{\omega}z}}$$

ÜB 3

$\boxed{1}$ (b)(iii) $\Rightarrow F(F(z)) = \dfrac{(1-\bar{w}z)w - (w-z)}{(1-\bar{w}z) - \bar{w}(w-z)}$

$$= \frac{w\cancel{1} - z|w|^2 - w + z}{1 - \bar{w}z - |w|^2 + z\bar{w}} = \frac{\cancel{w} - z|w|^2 \cancel{w} + z}{1-|w|^2}$$

$$= z\,\frac{1-|w|^2}{1-|w|^2} = z$$

$\Rightarrow F \circ F = 1 \qquad \Rightarrow F$ bijektiv

2 Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$

$f : B_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 0$

<u>Beh:</u> Für $\varepsilon > 0$ klein genug gilt

$$\int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{1}{f(z)}\, dz = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}$$

<u>Bew:</u> * Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$, $f : B_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$ holom.
$f(z_0) = 0$, $f'(z_0) \neq 0$

$$\Rightarrow f(z_0 + h) = f'(z_0) \cdot h + \cancel{O(h)}\; r(h)$$

wobei $\frac{r(h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

$\Rightarrow$ ~~Für~~ $\exists\, \tilde{\varepsilon} > 0 : \ f(z) \neq 0 \ \forall z \in B_{\tilde{\varepsilon}}(z_0) \setminus \{z_0\}$

(sonst wäre $f'(z_0) = 0$)

$\Rightarrow$ Für beliebige $0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}$ ist also

$$(*) \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{1}{f(z)}\, dz \quad \text{wohldefiniert.}$$

* Zuerst zeigen wir, dass das Integral (*) unabhängig von ε ist (für alle $0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}$).

Sei also $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, \tilde{\varepsilon})$ und betrachte die stetigen Integrationswege: $\gamma_1 : [0, 2\pi)$ ~~[illegible]~~ $\to \mathbb{C}$

$t \mapsto z_0 + \varepsilon_1 e^{it}$

$\boxed{2}$ und $\gamma_2 : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$

ÜB 3

$t \to z_0 + \varepsilon_2 e^{it}$.

Sei dann $\gamma = \gamma_1 + [\varepsilon_1, \varepsilon_2] + (-\gamma_2) + \underbrace{[\varepsilon_2, \varepsilon_1]}_{= -[\varepsilon_1, \varepsilon_2]}$

f ist holomorph auf $B_\delta(z_0)$ und damit auch stetig
$\Rightarrow f^{-1}$ holom. und stetig

$\xRightarrow[\text{VL}]{\text{Satz 10}} \int_\gamma \frac{1}{f(z)} dz = 0$

und ~~γ~~ da $[\varepsilon_2, \varepsilon_1] = -[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{f(z)} dz - \int_{\gamma_2} \frac{1}{f(z)} dz = 0$$

$\Rightarrow (*)$ ist unabhängig von ε $\forall \varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon})$

$*$ $f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existiert da
f'' holom. auf $B_\delta(z_0)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists$ ~~δ~~ $r > 0 : \left| \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} - \frac{1}{f'(z_0)} \right| < \frac{r}{2\pi}$

D.h $\forall z \in B_{\varepsilon'}(z_0) \setminus \{z_0\}$ gilt:

$$\left| \int_{|z-z_0| = \varepsilon} \frac{1}{f(z)} dz - \frac{2\pi i}{f'(z_0)} \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon e^{it}}{f(z_0 + \varepsilon e^{it})} - \frac{1}{f'(z_0)} dt \right|$$

$$\leq \int_0^{2\pi} dt \underbrace{\left| \frac{z_0 + \varepsilon e^{it} - z_0}{f(z_0 + \varepsilon e^{it}) - f(z_0)} - \frac{1}{f'(z_0)} \right|}_{\leq \frac{r}{2\pi}}$$

$$\Rightarrow \leq \int_0^{2\pi} dt \, \frac{r}{2\pi} = r \qquad \forall \varepsilon \in (0, \min(\tilde{\varepsilon}, \varepsilon'))$$

$\cancel{\forall z \in B_{\varepsilon'}(z_0) \setminus \{z_0\}}$

$\Rightarrow$ Für $0 < \varepsilon < \min(\tilde{\varepsilon}, \varepsilon')$:

$$\int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{1}{f(z)} dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{1}{f(z)} dz = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}$$

[3] Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, einfach zusammenhängend

Sei $f = u + iv$ holomorph in Ω, sodass f' stetig

$\gamma : [a,b] \to \Omega$ C^1-Weg

zerlege $\gamma = \alpha + i\beta$

$\Rightarrow \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ stetig diffbar

und
$$f(\gamma(t))\,\gamma'(t) = \tilde{u}(\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t))\,\tilde{\alpha}'(t) - \tilde{v}(\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t))\,\tilde{\beta}'(t)$$
$$+ i\left(\tilde{u}(\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t))\,\tilde{\beta}'(t) + \tilde{v}(\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t))\,\tilde{\alpha}'(t)\right)$$
$$\forall t \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}} (\tilde{u}, -\tilde{v}) \cdot dl + i \int_{\tilde{\gamma}} (\tilde{v}, \tilde{u}) \cdot dl$$

$$dl = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

3 Mit dem Satz von Green! (ÜB 3)

$$\int_{\tilde\gamma} (\tilde u, -\tilde v)\cdot dl = \int_{\mathrm{int}\,\tilde\gamma} \underbrace{(-\partial_x \tilde v - \partial_y \tilde u)}_{\overset{CR-DGL}{=}0} dx\,dy = 0$$

$$\int_{\tilde\gamma} (\tilde v, \tilde u)\cdot dl = \int_{\mathrm{int}\,\tilde\gamma} \underbrace{(\partial_x \tilde u - \partial_y \tilde v)}_{\overset{CR-DGL}{=}0} dx\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0 \qquad \square$$

4 (a) $\gamma: [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$, $r > 0$

$t \to re^{it}$

$$\Rightarrow \int_\gamma z^n\,dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n\, ire^{it}\,dt$$

$$= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} dt\, e^{i(n+1)t}$$

$$= \begin{cases} 2\pi i & \text{für } n=-1 \\ \frac{r^{n+1}}{(n+1)} \Big(\underbrace{e^{i(n+1)2\pi}}_{=1} - 1 \Big) = 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \delta_{n,-1}\, 2\pi i$$

(b) $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$

$t \to z_0 + re^{it}$ mit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

und $0 < r < |z_0|$

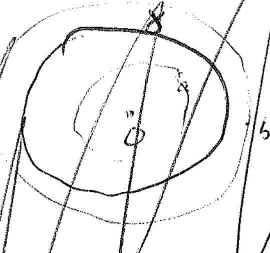
(d.h. $0 \notin \operatorname{int} \gamma$, $0 \notin \gamma$)

Für $n \geq 0$: $\displaystyle\int_\gamma z^n \, dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{(z_0 + re^{it})^n}_{= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k} r^k e^{itk}} ire^{it} \, dt$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k} \underbrace{\int_0^{2\pi} dt \, ire^{it} (re^{it})^k}_{= \int_{|z|=r} z^k \, dz \overset{(a)}{=} \cancel{\delta_{k,-1} 2\pi i}\ 0 \quad \forall k \geq 0}$$

$$= 0$$

~~(c) Sei $|a| < r < |b|$, $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$, $t \to re^{it}$, $r > 0$~~



~~$\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{(z-a)(z-b)} \, dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{(re^{it}-a)(re^{it}-b)} \, dt$~~

~~$=$~~

ÜB 3

4 (b) $n = -1$:

$$\int_\gamma z^{-1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{\frac{z_0}{r} + re^{it}} dt$$

$$= \ln\left(\frac{z_0}{r} + re^{it}\right)\Big|_{t=0}^{2\pi} = \cancel{a}$$

$$= \ln\left(\frac{z_0}{r}\right) - \ln\left(\frac{z_0}{r}\right) = 0$$

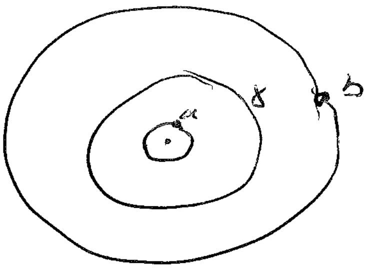
$n = -m$, $m > 1$

$$\Rightarrow \int_\gamma z^{-m} dz = \int \frac{ire^{it}}{(z_0 + re^{it})^m} dt = -\frac{1}{m+1} \frac{1}{(z_0 + re^{it})^{m+1}}\Big|_{t=0}^{2\pi}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \int_\gamma z^n dz = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

(c) Sei $|a| < r < |b|$, $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$, $t \to re^{it}$



$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)\frac{1}{a-b} \quad (*)$$

$$\cancel{\int_\gamma \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{(re^{it}-a)(re^{it}-b)} dt}$$

Mit (*) folgt dann

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,dz = \frac{1}{a-b}\left(\oint_{|z|=r} \frac{1}{z-a}\,dz - \oint_{|z|=r} \frac{1}{z-b}\,dz \right)$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(\oint_{|z+a|=r} \frac{1}{z}\,dz - \underbrace{\oint_{|z+b|=r} \frac{dz}{z}}_{\substack{0 \text{ nicht drin} \\ \text{da } r<|b| \\ =0}} \right)$$

$$= \frac{1}{a-b} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}-a}\,dt}_{\overset{(a)}{=} 2\pi i} = \frac{2\pi i}{a-b}$$

Aufgabe 2: $\displaystyle\int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{1}{f(z)}\,dz \overset{!}{=} \frac{2\pi i}{f'(z_0)}$ (*)

(1) $f'(z_0) \neq 0$, $f(z_0) = 0$, d.h. $\exists$ Fkt. r auf $B(z_0, \rho)$ sd.

$$f(z_0+h) = \underbrace{f(z_0)}_{=0} + h f'(z_0) + r(h), \quad h \in B(0,\rho)$$

mit $\frac{r(h)}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0$.

Sei $\varepsilon_0 < \rho$ klein genug sd. $\left|\frac{r(h)}{h}\right| \leq \frac{|f'(z_0)|}{2}$ für $h \in B(0,\varepsilon_0)$. Dann

$$\left|\frac{f(z_0+h)}{h}\right| = \left|f'(z_0) + \frac{r(h)}{h}\right| \geq |f'(z_0)| - \left|\frac{r(h)}{h}\right|$$

$$\geq \frac{|f'(z_0)|}{2} > 0 \text{ für } h \in B(0,\varepsilon_0)$$

d.h. $|f(z_0+h)| \geq |h| \frac{|f'(z_0)|}{2}$ und für $h \in \partial B(0,\varepsilon)$ mit $\varepsilon < \varepsilon_0$ gilt

$$|f(z_0+h)| \geq \varepsilon \frac{|f'(z_0)|}{2}$$

$$\to \left|\frac{1}{f(z_0+h)}\right| \leq \frac{2}{f'(z_0)\varepsilon} \quad \forall h \in \partial B(0,\varepsilon). \quad (**)$$

Wir zeigen:

(2) $\displaystyle\int_{|z-z_0|=\varepsilon_1} \frac{dz}{f(z)} = \int_{|z-z_0|=\varepsilon_2} \frac{dz}{f(z)}$ für $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < \varepsilon_0$

(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{f(z)} = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}$

Zu (1): Aus VL: Für holo. Fkt. $g: \Omega \to \mathbb{C}$ und homotope Kurven γ_1, γ_2 in Ω:

$$\int_{\gamma_1} g(z)\,dz = \int_{\gamma_2} g(z)\,dz$$

(Satz 13 aus VL)

Bei uns: $\gamma_{1/2}: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longmapsto \gamma_{1/2}(t) := \varepsilon_{1/2} e^{it} + z_0$

mit Homotopie

$H: [0,1] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

$(s,t) \longmapsto H(s,t) := z_0 + (\varepsilon_1 + s(\varepsilon_2 - \varepsilon_1))\, e^{it}$

Es gilt
- $H(0,t) = z_0 + \varepsilon_1 e^{it} = \gamma_1(t)$
- $H(1,t) = z_0 + \varepsilon_2 e^{it} = \gamma_2(t)$
- $\mathrm{Bild}(H) \subset B(z_0, \varepsilon_0) \setminus \{z_0\}$
- $\frac{1}{p}$ holo auf $B(z_0, \varepsilon_0) \setminus \{z_0\}$

Satz 13
$$\Longrightarrow \int_{|z-z_0| = \varepsilon_1} \frac{dz}{p(z)} = \int_{|z-z_0| = \varepsilon_2} \frac{dz}{p(z)}$$

Zu (2):
$$\int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{p(z)} = \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{p(z_0) + (z-z_0)p'(z_0) + r(z-z_0)} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{dt \quad i\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it} p'(z_0) + r(\varepsilon e^{it})} = i \int_0^{2\pi} \frac{dt}{p'(z_0) + \frac{r(\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}}}$$

n.V. gilt $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \dfrac{1}{p'(z_0) + \frac{r(\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}}} = \dfrac{1}{p'(z_0)}$ punktweise für alle $t \in [0, 2\pi]$ und mit (**) für ε klein:

$$\frac{1}{\left|p'(z_0) + \frac{r(\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}}\right|} \leq \frac{2}{|p'(z_0)|} \longleftarrow \text{„integrable Majorante“}$$

Dom. KSZ.
$$\Longrightarrow \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{p(z)} = i \int_0^{2\pi} \frac{dt}{p'(z_0)} = \frac{2\pi i}{p'(z_0)}$$