Übungsblatt 2 zu Funktionentheorie

Bemerkung: Auf den Übungsblättern, bzw. Tutoriumsblättern unterscheiden wir in der Notation nicht zwischen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und den dazugehörigen Vektorfeldern $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Für die erste Aufgabe definieren wir für $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ die Funktionen

$$\partial f(z_0) := \frac{1}{2}\left(\partial_x f(z_0) - i\partial_y f(z_0)\right), \qquad \overline{\partial} f(z_0) := \frac{1}{2}\left(\partial_x f(z_0) + i\partial_y f(z_0)\right),$$

mit $z_0 \in G$ sodass die auftretenden partiellen Ableitungen existieren.

Aufgabe 1:
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$.

(a) Falls f in $z_0 \in G$ komplex differenzierbar ist, so gilt $\partial f(z_0) = f'(z_0)$.

(b) Sei f stetig (reell) partiell differenzierbar in $z_0 \in G$. Dann sind äquivalent:

  (i) f erfüllt die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in z_0.

  (ii) Es gilt $\overline{\partial} f(z_0) = 0$.

Aufgabe 2:
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig reell differenzierbar und $\widetilde{G} \subseteq G$ eine dichte Teilmenge. Zeigen Sie: Falls f für alle $z_0 \in \widetilde{G}$ komplex differenzierbar in z_0 ist, dann ist f bereits holomorph in G.

Aufgabe 3:
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit stetiger (komplexer) Ableitung f'. Dann gibt es zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset G$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass gilt: Für $z_0 \in K$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \delta$ ist $z \in G$ und

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|.$$

Aufgabe 4:

(a) Untersuchen Sie, für welche Tupel $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert als

$$u(x, y) := x^2 + 2axy + by^2, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

Realteil einer holomorphen Funktion ist. Bestimmen Sie für jedes dieser Tupel $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $u = \mathrm{Re}(f)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$v(z) := \log(|z|), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

harmonisch ist, also $(\partial_x^2 f + \partial_y^2 f) = 0$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie weiter, dass v nicht Realteil einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ sein kann. Warum ist das kein Widerspruch zu Satz 6 der Vorlesung?
Tipp: Um zu zeigen, dass v kein Realteil einer holomorphen Funktion f wie oben sein kann können Sie zum Beispiel wie folgt vorgehen: Angenommen eine solche Funktion f existiert. Zeigen Sie dann, dass die Funktion $h(z) := \exp(\frac{1}{2}(f(z) - f(1))$ eine auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetige Wurzel ist: $h^2(z) = z$ gilt für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Abgabe je Zweiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 27.04.2016 in der Zentralbung.