Aufgabe 1: a) $2\,\partial f(z_0) = (\partial_x f - i\,\partial_y f)(z_0)$ $\underline{\underline{\text{Def.}}}$

$= (\partial_x u + \partial_y v + i\,\partial_x v - i\,\partial_y u)(z_0) =$

$= 2(\partial_x u + i\,\partial_x v)(z_0) = 2f'(z_0)$

b) $\bar\partial f(z_0) = \frac{1}{2}(\partial_x u - \partial_y v)(z_0) + \frac{i}{2}(\partial_y u + \partial_x v)(z_0) = (*)$

Es gilt: $(*) = 0 \iff \left\{\begin{matrix}(\partial_x u - \partial_y v)(z_0) = 0 \\ (\partial_y u + \partial_x v)(z_0) = 0\end{matrix}\right\}$

$\iff$ CR-DGL in z_0

Aufgabe 2: Da n.V. f stetig reell diffbar (in $z \in \tilde G$) gilt für $z \in \tilde G$ $\left\{\begin{matrix}(\partial_x u)(z) = (\partial_y v)(z) \\ (\partial_y u)(z) = -(\partial_x v)(z)\end{matrix}\right\}$ $(*)$

(CR-DGL), vgl. Satz 4.

Da f stetig reell diffba auf ganz G ist, sind die Fkt $\partial_x u - \partial_y v$, $\partial_y u + \partial_x v$ auf G stetig und ($\tilde G \subseteq G$ dicht!) $(*)$ gilt auf ganz G. Nochmalige Anwendung von Satz 4 liefert die Beh.

Aufgabe 3: (Der Beweis ist im Grunde identisch zu entspr. Aussagen in Ana.)

K kpkt., also $\operatorname{dist}(K, G^c) =: 2\delta_0 > 0$ und mit $z_0 \in K$ gilt $B_{\delta_0}(z_0) \subseteq G$. Sei $z_0 \in K$, $|z - z_0| < \delta$, und $\delta \leq \delta_0$.

Die Fkt. $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longmapsto h(t) := f(z_0 + t(z - z_0))$

ist also wohldef. und es gilt $h \in C^1([0,1])$ mit

$$\underbrace{h'(t)}_{\text{reelle Abl.}} = (z - z_0)\underbrace{f'}_{\text{Komplexe Abl.}}(z_0 + t(z - z_0))$$

Also mit HDI:

$$f(z) - f(z_0) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t)\,dt = (z - z_0)\int_0^1 f'(z_0 + t(z - z_0))\,dt$$

~~Daraus~~ folgt

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0)| \leq \cancel{|z - z_0| \sup_{0 \leq t \leq 1} |h(t) - h(0)|}$$

$$\leq |z - z_0| \sup_{y \in B_\delta(z_0)} |f'(y) - f'(z_0)| \leq |z - z_0| \sup_{\substack{z_0 \in K \\ y \in B_\delta(z_0)}} |f'(y) - f'(z_0)|$$

Da K kpkt ist $K_{\delta_0} = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, K) \leq \delta_0 \} \subset G$ beschränkt und abgeschlossen, also selbst kpkt.

Da f' folglich auf K_{δ_0} ~~stetig~~ uniform stetig ist folgt die Behauptung.

Aufgabe 4: a) Angenommen es gibt $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holo mit $f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$.

Da $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und $\partial_x u = \partial_y v$, $\partial_y u = -\partial_x v$ ist auch $v \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Also gilt (CR-DGL)

$$\partial_x^2 u = \partial_x \partial_y v = \partial_y \partial_x v = -\partial_y^2 u \quad \text{auf } \mathbb{R}^2 \text{ (vgl. VL.)}$$

Einsetzen von u liefert $b = -1$. Die CR-DGL sind dann

$$\partial_y v = \partial_x u = 2x + 2ay$$

$$\partial_x v = -\partial_y u = 2y - 2ax$$

D.h. $\exists c \in \mathbb{R}$ sd. $v(x,y) = 2xy + ay^2 - ax^2 + c$ $(x,y \in \mathbb{R})$

Also $f(x+iy) = (1-ia)(x+iy)^2 + ic$, wobei f klar holo. ist. Insgesamt also: u Realteil einer holo. Fkt. g.d.w. $(a,b) \in \mathbb{R} \times \{-1\}$ und die holo. Fkt zu einem solchen Tupel (a,b) sind

$$f_c(z) = (1-ia)z^2 + c \qquad (c \in \mathbb{R}\ \text{bel.})$$

b) • $v(z) = v(x+iy) = \log(\sqrt{x^2+y^2})$ und

$$(\partial_x^2 v + \partial_y^2 v)(x+iy) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

also v harmonisch in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

• Kein Widerspruch zu Satz 6, denn $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht <u>einfach</u> zusammenhängend!

• Wir zeigen zunächst den Tipp:

Es gilt $f'(z) = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Also für $g = \exp \circ f$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$g'(z) = \frac{g(z)}{z}, \qquad g''(z) = \frac{g'(z)}{z} - \frac{g(z)}{z^2} = 0$$

Es gibt also ein $c \in \mathbb{C}$ sd. $g(z) = cz$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (da $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ zusammenh.)

Für $h(z) = \exp(\frac{1}{2}(f(z) - f(1)))$ gilt dann

$$h^2(z) = \frac{g(z)}{g(1)} = \frac{cz}{c} = z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

also auch $h(z^2) = \pm z$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Da die Fkt. $\frac{h(z^2)}{z}$ auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ stetig ist, gilt entweder

$$h(z^2) = z \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

oder

$$h(z^2) = -z \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

Beides ergibt einen Widerspruch, denn im ersten Fall gilt z.B.

$$-1 = h((-1)^2) = h(1) = h((1)^2) = 1 \quad ⚡.$$