Aufgabe 1 Die Aufgabe wird korrigiert aber nicht bewertet, da die Aufgabenstellung nicht gut war (Sorry ☹)

- Problem: Zwar ist die Lsg.-formel für u richtig, aber es gilt $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-t - \frac{c^2}{4t})\,dt = \sqrt{\pi} e^{-|c|}$

und auf die Lösungsformel

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} f(y)\,dy$$

kommt man auf natürlicherem Weg...

- Idee d. Aufg.: Fouriertrafo formt lineare DGL (konst. Koeff.) → algebraische Gl. um.

- Zum finden eines Kandidaten u für die Lsg. formen wir formal (ohne Begr. der einzelnen Schritte) via Fourier-Inversionsformeln um. Dass man so tatsächlich eine Lsg. gefunden hat kann man dann durch nachrechnen prüfen:

Für Lsg. u muss gelten: $(-\Delta+1)(u)(x) = f(x)$, also

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}((-\Delta+1)u))(x) \overset{(☹)}{=} \mathcal{F}^{-1}\Big(\underbrace{((\cdot)^2+1)}_{=:g}\mathcal{F}(u)\Big)(x) = \mathcal{F}^{-1}(g\,\mathcal{F}(u))(x)$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{g(x)} \mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}(u)(x) \rightsquigarrow \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1}{g}\mathcal{F}(f)\Big)(x) = u(x)$$

(wo wir in (☹) verwendet haben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} u'(\xi)\,d\xi \overset{(P.I.)}{=} (-ix)\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} u(\xi)\,d\xi$$)

Unser Kandidat für die Lsg. ist also

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{g}\mathcal{F}(f)\right)(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\,\frac{1}{\xi^2+1}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi\eta} f(\eta)\,d\eta\right)d\xi$$

$$\overset{(\text{Fubini})}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(\eta)\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi(x-\eta)}}{\xi^2+1}\,d\xi\right)d\eta$$

Das Integral $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi(x-\eta)}}{\xi^2+1}\,d\xi$ kann via dem Residuensatz gerechnet werden.

Für $\alpha := x-\eta > 0$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi(x-\eta)}}{\xi^2+1}\,d\xi = 2\pi i \lim_{z\to i}\left((z-i)\frac{e^{iz(x-\eta)}}{(z-i)(z+i)}\right) =$$

$$= 2\pi i\,\frac{e^{-(x-\eta)}}{2i} = \pi e^{-(x-\eta)}$$

Analog für $\alpha = (x-\eta) < 0$ (z.B via TRAFO $\xi \to -\xi$)

und insgesamt $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi(x-\eta)}}{\xi^2+1}\,d\xi = \pi e^{-|x-\eta|}$

Für u dann: $u(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-|x-y|}\,dy$

Dass u tatsächlich Lsg. von $-\Delta u + u = f$ ist kann nun einfach nachgerechnet werden

(zerlege $u(x) = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{x} f(y)e^{-(x-y)}\,dy + \int_{x}^{\infty} f(y)e^{-(y-x)}\,dy\right]$

(Version der) + „Kettenregel")

$\boxed{2}$ $\vartheta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$t \to \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$$

Definiere $f : \cancel{\mathbb{R}}\ \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$

$$n \to \cancel{f(n)}\ e^{-\pi n^2 t}$$

$$\Rightarrow \vartheta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Poisson}}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)$$

wobei $\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i k \cdot x}\, dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-2\pi i k x} e^{-\pi t x^2}}_{= e^{-\left(\sqrt{\pi t}\, x + i k \sqrt{\frac{\pi}{t}}\right)^2} e^{-\frac{\pi}{t} k^2}} dx$$

$$= e^{-\frac{\pi k^2}{t}} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(y + i k \sqrt{\frac{\pi}{t}}\right)^2} dy}_{= \sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi}{t} k^2}$$

$$\Rightarrow \vartheta(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi k^2}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \vartheta(t)$$

$\boxed{3}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und $\exists A > 0 : |f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$ | ÜB 12

<u>Beh:</u> Sei $r > 0$. f kann zu $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fortgesetzt werden mit $|f(z)| \leq A' e^{2\pi r |z|}$, $A' > 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$

$\iff \operatorname{supp} \hat{\tilde{f}} \subseteq [-r, r]$

(⇐) <u>Beh:</u> $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq [-r, r] \Rightarrow f(x) = \int_{-r}^{r} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad \forall x \in \mathbb{R}$

<u>Bew:</u> Sei $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq [-r, r]$

$\Rightarrow f, \hat{f} \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow$ Inversionsformel gilt: $f(x) = \int_{-r}^{r} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

~~The range of integration is finite~~

~~$\Rightarrow$ repl~~

Der Integrations~~weg~~bereich ist endlich, d.h. wir können x durch $z \in \mathbb{C}$ ersetzen und die Fkt. $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z \to \tilde{f}(z) = \int_{-r}^{r} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi z} d\xi$$

definieren

Es gilt $\tilde{f}(z) = f(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}$ und $\tilde{f}$ ist holomorph. ($\tilde{f}$ ist damit die analytische Fortsetzung v. f.)

Es gilt für $z = x+iy \in \mathbb{C}$

$$|\tilde{f}(z)| \leq \int_{-M}^{M} |\hat{f}(\xi)|\, e^{-2\pi \xi y}\, d\xi$$

$$\leq e^{2\pi M|y|} \underbrace{\int_{-M}^{M} |\hat{f}(\xi)|\, d\xi}_{=: A (>0)}$$

$$\leq e^{+2\pi M|z|} A \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

$\square$

(ii) <u>Beh.:</u> Sei f eine ganze Fkt. mit

$$|f(x+iy)| \leq A' \frac{e^{2\pi M|y|}}{1+x^2} \quad ; \; x,y \in \mathbb{R}$$

für ein festes $A' > 0$.

Dann gilt $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq [-M, M]$

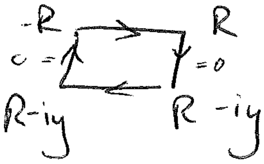
<u>Bew.:</u> Sei $A' > 0$ und f eine ganze Fkt.

mit $|f(x+iy)| \leq A' \frac{e^{2\pi M|y|}}{1+x^2}$; $x,y \in \mathbb{R}$.

Sei desweiteren $\xi > M$, dann gilt

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i \xi x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-iy)\, e^{-2\pi i \xi (x-iy)}\, dx$$

mit $y > 0$.

[3] (ii) Die Zeile oben folgt aus 

.

$$\Rightarrow \quad |\hat{f}(\xi)| \le \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|f(x-iy)|}_{\le A' \frac{e^{2\pi M y}}{1+x^2} \ (y>0)} \underbrace{|e^{-2\pi i \xi (x-iy)}|}_{e^{-2\pi \xi y}} \, dx$$

$$= A' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi y (M-\xi)}}{1+x^2} \, dx$$

$$\le C e^{-2\pi y \underbrace{(\xi - M)}_{>0}} \xrightarrow[y \to \infty]{} 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \hat{f}(\xi) = 0 \quad \forall \xi > M \\ \text{Genauso } \hat{f}(\xi) \quad \forall \xi < -M \end{array}\right\} \operatorname{supp} \hat{f} \subset [-M, M]$$

$\square$

(iii) Beh: Sei f holomorph mit

(1) $|f(x)| \le \frac{A}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $|f(x+iy)| \le A' e^{2\pi M |y|}$; $x, y \in \mathbb{R}$.

für ~~den~~ festes $A', A > 0$

Dann gilt $\operatorname{supp} \hat{f} \subset [-M, M]$

Bew: Sei f holomorph mit (1) und (2).

Sei $\xi > R$ und $\varepsilon > 0$,

$$f_\varepsilon(z) := \frac{f(z)}{(1+i\varepsilon z)^2}.$$

Bemerke: $\left|\frac{1}{(1+i\varepsilon z)^2}\right| \leq 1$ ~~in the closed~~ in der abgeschl. unteren Halbebene. und $\frac{1}{(1+i\varepsilon z)^2} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 1$

$$\left|\hat{f}_\varepsilon(\xi) - \hat{f}(\xi)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \left(\frac{1}{(1+i\varepsilon z)^2} - 1\right) dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{dom. Konv. } (f \in \mathcal{R})} 0$$

$$\Rightarrow \hat{f}_\varepsilon(\xi) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \hat{f}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Für feste $\varepsilon > 0$ gilt: $|f(x+iy)| \leq A'' \frac{e^{2\pi M|y|}}{1+x^2}$ per Voraussetzung (2).

$$\overset{(ii)}{\Longrightarrow} \hat{f}_\varepsilon(\xi) = 0 \Rightarrow \hat{f}(\xi) = 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

Genauso für $\xi < -R$ (mit $\frac{1}{(1-i\varepsilon z)^2}$ i. d. OHE.)

$$\Rightarrow \operatorname{supp} \hat{f} \subseteq [-R, R] \quad \square$$

3 (iv) Beh: Sei f ~~holomorph.~~ ganze Fkt. ÜB12

mit $|f(x)| \leq \frac{A'}{1+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ und $A' > 0$.

Dann gilt $|f(x+iy)| \leq A e^{2\pi r |y|}$; $x, y \in \mathbb{R}$

für $A > 0$

Bew: ~~Es genügt z.zg. dass $|f(x)| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ und $|f(z)| \leq e^{2\pi r |z|}$ für z ∈ (nach teilen durch eine geeignete Konst.) $\Rightarrow |f(x+iy)| \leq e^{2\pi r |y|}$~~

Nach dem Teilen durch eine geeignete Konstante genügt es z.zg. dass

Beh: $\left. \begin{array}{l} |f(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ |f(z)| \leq e^{2\pi r |z|} \quad \forall z \in \mathbb{C} \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x+iy)| \leq e^{2\pi r |y|}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Bew: Wir verwenden das angegebene Lemma.

S (aus dem Lemma) kann gedreht werden s.d. es den 1. Quadranten abdeckt $Q = \{ z = x+iy : x > 0, y > 0 \}$

Das Resultat bleibt dabei erhalten.

Betrachte $F(z) = f(z)\, e^{2\pi i M z}$

Dann $|F(x)| \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ und $x \in i\mathbb{R}^+$

Außerdem gilt $|F(z)| \le C e^{c|z|}$ (~~wegen~~ per V.)

$$\overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} \quad |F(z)| \le 1 \quad \forall z \in Q$$

$$\Rightarrow |f(z)| \le e^{2\pi M y} \quad \forall z \in Q$$

~~Ge~~ Ein ähnliches Argument lässt sich für jeden der 4 Quadranten finden

$\square$

~~E~~

$\Rightarrow$ Paley - Wiener