Übungsblatt 11 zu Funktionentheorie

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen der folgenden Funktionen f in den je angegebenen Gebieten Ω.

(i) $f(z) := z^4 + 4z - 2$ mit $\Omega := B(0,1)$

(ii) $f(z) := z^5 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{3}$ mit $\Omega := B(0, \frac{1}{2})$

Aufgabe 2: Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\overline{B(0,1)} \subset \Omega$. Ferner gelte $|f(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat dann die Gleichung $f(z) = z^n$ genau n Lösungen in $B(0,1)$ (und insbesondere hat f also genau einen Fixpunkt in $B(0,1)$).

Aufgabe 3: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$.

(i) Angenommen die Funktion

$$\begin{aligned} f : [0,1] \times \overline{B(z_0,r)} &\to \mathbb{C} \\ (t,z) &\to f_t(z) \end{aligned}$$

ist stetig und für festes $t \in [0,1]$ analytisch als Funktion $B(z_0,r) \ni z \to f_t(z)$. Sei weiter $f_t(z) \neq 0$ für alle $t \in [0,1]$ und $z \in \partial B(z_0,r)$. Dann ist die Anzahl der Nullstellen von f_t auf $B(z_0,r)$ für alle $t \in [0,1]$ endlich und unabhängig von t.
Tipp: Verwenden Sie Satz 32 der Vorlesung

(ii) Zeigen Sie die folgende Erweiterung des Satzes von Rouche: Seien $f, g : \overline{B(z_0,r)} \to \mathbb{C}$ stetig auf $\overline{B(z_0,r)}$ und holomorph auf $B(z_0,r)$. Falls dann für alle $z \in \partial B(z_0,r)$

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

gilt, dann haben f und g keine Nullstellen auf $\partial B(z_0,r)$ und dieselbe Anzahl an Nullstellen in $B(z_0,r)$.

Aufgabe 4: Seien $a, b > 0$ und $f_0 : \Omega_{a,b} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f_0(z) = f_0(z+1)$ für $z \in \Omega_{a,b}$. Wir schreiben $\tau(f_0) = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ für die Fourierreihenkoeffizienten von f_0, d.h. es gilt

$$f_0(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \exp(2\pi i n z).$$

(i) Zeigen Sie: $\tau(-if_0') = \{2\pi n a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

(ii) Zeigen Sie: Die Funktion $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert als

$$f(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-t(2\pi n)^2) a_n \exp(2\pi i n x)$$

ist eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x) = \partial_x^2 f(t,x) & \text{für } (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ \lim_{t\to 0} f(t,x) = f_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Weiter ist für $t > 0$ die Funktion $f(t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(t,x)$, die Einschränkung auf $\mathbb{R}$ von einer ganzen und periodischen Funktion.

Abgabe je Zweiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 29.06.2016.