Aufgabe 1 (i) Betrachte als Vergleichsfunktion

$$g(z) = 4z-2, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Dann $|f(z) - g(z)| = |z|^4 = 1, \quad z \in \partial B(0,1)$

$$|f(z)| + |g(z)| \geq |g(z)| = |4z-2| =$$

$$= 4 \underbrace{|z - \tfrac{1}{2}|}_{\geq \frac{1}{2}} \geq 2$$

Also $|f(z) - g(z)| = 1 < 2 \leq |f(z)| + |g(z)|$

Mit dem Satz von Rouché hat also f auf $B(0,1)$ dieselbe Anzahl an Nullstellen wie g, also genau eine.

(ii) Vergleichsfunktion $g(z) = \frac{1}{3}, \quad z \in \mathbb{C}$.

Dann $|f(z) - g(z)| = |z^5 + \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{4} z^2|$

$$\leq \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) <$$

$$< \frac{1}{3} = |g(z)| \leq |g(z)| + |f(z)|, \quad z \in \partial B(0, \tfrac{1}{2})$$

Also hat f in $B(0, \frac{1}{2})$ genauso viele Nullstellen wie g, d.h. keine.

Aufgabe 2: Wir betrachten die Funktionen

$$g(z) = -p(z) + z^n \quad \text{und} \quad h(z) = z^n$$

Dann gilt $|h(z) - g(z)| = |p(z)| < 1$

$$= |h(z)| \leq |h(z)| + |g(z)|, \quad z \in \partial B(0,1)$$

Mit dem Satz von Rouché gilt also:

h und g haben in $B(0,1)$ also gleich viele Nullstellen, d.h.

die Gleichung $p(z) = z^n$ hat in $B(0,1)$ genau n Lösungen

Aufgabe 3: (i) Behauptung: Es gibt $\varepsilon > 0$ s.d. $|f_t(z)| > 0$ für alle $t \in [0,1]$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq r - \varepsilon$.

Bew.: Ang. die Beh. gilt nicht, d.h. es gibt eine Folge $(t_n, z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $(t_n, z_n) \in [0,1] \times \overline{B(z_0, r)}$ mit $|z_n| \to r$ und s.d. $f_{t_n}(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Da $[0,1] \times \overline{B(z_0, r)}$ kompakt ist gilt es eine kgt. Teilfolge, d.h. es gibt $(t_0, z_0) \in [0,1] \times \overline{B(z_0, r)}$ und eine Teilfolge $(t_{n_k}, z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ s.d. $(t_{n_k}, z_{n_k}) \xrightarrow{k \to \infty} (t_0, z_0)$. Da $|z_n| \xrightarrow{n} r$ gilt auch $|z_{n_k}| \xrightarrow{k} r$, also $z_0 \in \partial B(z_0, r)$.

Da f stetig ist gilt auch $f(t_0, z_0) = f_{t_0}(z_0) = 0$ mit $z_0 \in \partial B(z_0, r)$, ein Widerspruch!

Mit der Behauptung gilt dann

$\#\{$Nullstellen von f_t in $B(z_0, r)\}$

$= \#\{$Nullstellen von f_t in $B(z_0, r-\varepsilon)\}$.

Also, da die rechte Seite mit Satz 32 von t unabhängig ist, ist auch die linke Seite von t unabhängig

(ii) Der Beweis ist analog zum Satz von Rouché wie in der Vorlesung (Satz 33), wobei Satz 32 durch Teilaufgabe (i) ersetzt wird.

Aufgabe 4: (i) Folgt aus der Eindeutigkeit der Fourierkoeffizienten und der normalen Kgz. der Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \exp(2\pi i n x)$ in $\Omega_{a,b}$:

$$f_0'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{d}{dx} a_n \exp(2\pi i n x) =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n 2\pi i n \exp(2\pi i n x)$$

$$-i f_0'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n 2\pi n \exp(2\pi i n x) \quad \text{und}$$

$\{a_n 2\pi n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sind die Fourierkoeffizienten von $-if_0'$, d.h. $\mathcal{F}(-if_0') = \{2\pi a_n n\}_{n\in\mathbb{Z}}$

(ii) Für $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$ ist die Reihe wieder normal konvergent, d.h.

$$\partial_t f(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -(2\pi n)^2 \exp(-t(2\pi n)^2)\, a_n \exp(2\pi i n x)$$

$$\partial_x^2 f(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-t(2\pi n)^2)\, a_n [-(2\pi n)^2] \exp(2\pi i n x)$$

Da die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \exp(2\pi i n x)$ (für festes x) absolut kgt. ist, gilt mit maj. Kgz.

$$\lim_{t\downarrow 0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \exp(2\pi i n x) \exp(-t(2\pi n)^2) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \exp(2\pi i n x) = f_0(x)$$

Für $t > 0$ ist $f(t,\cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \to f(t,x)$ die Einschränkung der holo. Fkt.

$$\Omega_{a,b} \ni z \to \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \exp(-t(2\pi n)^2) \exp(2\pi i n z)$$

Definiere (Fourier-)Koeffizienten

$b_n := a_n \exp(-t(2\pi)^2 n^2)$. Nach Vl. gilt also:

Die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n \exp(2\pi i n z)$ ist normal kgt. auf $\mathbb{C}$ und definiert dort eine ganze Funktion. Periodizität gilt per Definition.