Übungsblatt 10 zu Funktionentheorie

Aufgabe 1: Zeigen Sie: Sind $\lambda_0, ..., \lambda_m \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ paarweise verschieden, dann ist die (eindeutige) Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \lambda_j^k = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 0, ..., m-1 \\ 1 & \text{für } k = m \end{cases}$$

gegeben durch den Vektor $a = (a_j)_{j=0}^m \in \mathbb{C}^{m+1}$ mit $a_j := \prod_{k=0,k\neq j}^m (\lambda_j - \lambda_k)^{-1}$.
Tipp: Wenden Sie den Residuensatz auf die Funktion $z \to z^k / \prod_{k=0}^m (z - \lambda_j)$ und Kurven $[0, 2\pi] \ni t \to \gamma_N(t) := Ne^{it}$ an. Betrachten Sie dann den Limes $N \to \infty$.

Aufgabe 2: (3 Punkte!)

(i) Seien P, Q Polynome, wobei Q auf $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ keine Nullstelle hat und $\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$ gilt. Sei $\alpha > 0$ beliebig und $a_1, ..., a_k$ die Nullstellen von Q mit positivem Imaginärteil, also $\mathrm{Im}(a_j) > 0$, $j = 1, ..., k$. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{i\alpha t}\, \mathrm{d}t = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}\left(\frac{P}{Q} e^{i\alpha \cdot}, a_j\right),$$

wo die linke Seite als uneigentliches Riemann Integral definiert ist.

(ii) Berechnen Sie das (uneigentliche Riemann) Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 3: (3 Punkte!) Sei f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ mit einer endlichen Menge $S := \{a_1, ..., a_n\}$ von Singularitäten, wobei für die a_i gelte, dass $a_i \notin \mathbb{Z}$ und f hat einen Pol 1. Ordnung in a_i, $i = 1, ..., n$.

(i) Sei γ eine geschlossene C^1-Kurve in $\mathbb{C}$ mit $\mathrm{Ran}(\gamma) \cap (S \cup \mathbb{Z}) = \emptyset$ und $\mathrm{Int}(\gamma) \cap \mathbb{Z} = \{m, m+1, ..., n\}$ für $m < n$, wobei $\mathbb{Z}$ hier als Teilmenge von $\mathbb{C}$ aufgefasst wird. Für die Windungszahl von γ gelte $n(\gamma, z) \in \{0, 1\}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Ran}(\gamma)$. Wir definieren die auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion g als

$$g(z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} f(z).$$

Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{\nu=m}^{n} f(\nu) + \sum_{z \in S \cap \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{Res}(f; z)\, \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}.$$

(ii) Es gelte zusätzlich die folgende Abfallbedingung für f: Es gibt Konstanten $M, R > 0$ sodass

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2} \quad \text{für } |z| > R.$$

Dann gilt die Formel

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} f(\nu) = -\sum_{z \in S} \mathrm{Res}(f; z)\, \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}.$$

Tipp: Betrachten Sie für $N \in \mathbb{N}$ die Kurven $[0, 2\pi] \ni t \to \gamma_N(t) := (N + 1/2)e^{it}$.

(iii) Beweisen Sie für $a \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$ die Formel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \frac{1 + e^{-2\pi a}}{1 - e^{-2\pi a}}.$$

(iv) Folgern Sie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$.

Abgabe je Zweiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 22.06.2016.