Aufgabe 7 Setze $p(z) = \prod_{j=0}^{m} (z - \lambda_j)$. Sei

$R := \max_{0 \le j \le m} |\lambda_j|$, dann gilt für $N > R$

und Kurven $\gamma_N : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$,

$t \longmapsto \gamma_N(t) := N e^{it}$ mit dem

Residuensatz

$$2\pi i \sum_{j=0}^{m} n(\gamma_N, \lambda_j) \operatorname{Res}(f, \lambda_j) = \int_{\gamma_N} f(z)\, dz$$

für die Fkt. $z \longrightarrow f(z) := \frac{z^n}{p(z)}$

Es gilt:

- $n(\gamma_N, \lambda_j) = 1 \qquad (j = 1, \ldots, m)$
- f hat bei λ_j einen Pol 1. Ordnung mit

$$\operatorname{Res}(f, \lambda_j) = \lim_{z \to \lambda_j} z - \lambda_j \frac{z^n}{\prod_{\ell=0}^{m} (z - \lambda_\ell)} = \frac{\lambda_j^n}{\prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \ne j}}^{m} (\lambda_j - \lambda_\ell)}$$

- $$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{z^k}{p(z)}\, dz \xrightarrow{N \to \infty} \begin{cases} 0 & k = 0, \ldots, m-1 \\ 1 & k = m \end{cases} \qquad (*)$$

Insgesamt also:

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{\lambda_j^k}{\prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \ne j}}^{m} (\lambda_j - \lambda_\ell)} = \begin{cases} 0 & k = 0, \ldots, m-1 \\ 1 & k = m \end{cases}$$

Zu $(*)$: $p(z) = \overset{\text{Normiertes Pol. vom Grad } m+1}{\prod_{j=0}^{m}(z-\lambda_j)} = z^{m+1} + \tilde{p}(z)$, wo

$\tilde{p}$ Polynom vom Grad m.

- Für $k = 0, \dots, m-1$ gilt:

$$\left|\int_{\gamma_N} \frac{z^k}{p(z)}\,dz\right| \le \cancel{\int_{\gamma_N} \frac{|z|^k}{|z^{m+1}+\tilde{p}(z)|}\,dz} \int_0^{2\pi} \frac{|\gamma_N(t)|^k}{|p(\gamma_N(t))|}\,|\gamma_N'(t)|\,dt$$

$$\underset{\left(N \text{ groß genug}\right)}{\le} \int_0^{2\pi} \frac{N^{k+1}}{|\gamma_N(t)|^{m+1} - |\tilde{p}(\gamma_N(t))|}\,dt \underset{\left(N \text{ groß genug}\right)}{\le} \int_0^{2\pi} \frac{2N^{k+1}}{N^{m+1}}\,dt$$

$$\xrightarrow{N\to\infty} 0$$

- Für $k=m$ gilt:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_N} \frac{z^m}{z^{m+1}+\tilde{p}(z)} - 1\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_N}\left(\frac{z^m}{z^{m+1}+\tilde{p}(z)} - \frac{1}{z}\right)dz\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_N} \frac{\tilde{p}(z)}{z^{m+2}+\tilde{p}(z)z}\right| \xrightarrow{N\to\infty} 0 \quad \left(\text{Zähler Pol. vom Grad } m, \text{ Nenner Pol. vom Grad } m+2\right)$$

Aufgabe 2 (i) Da $\deg(Q) \geq \deg(P)+1$ gibt es $R_0 > 0$ und eine Konstante C sd. $\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{C}{|z|}$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R_0$.

Insbes. (Ana I) existieren die Grenzwerte

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{P(t)}{Q(t)} \cos(\alpha t), \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^0 \frac{P(t)}{Q(t)} \cos(\alpha t),$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{P(t)}{Q(t)} \sin(\alpha t), \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^0 \frac{P(t)}{Q(t)} \sin(\alpha t).$$

Also ist die Fkt. $\mathbb{R} \ni t \to \frac{P(t)}{Q(t)} e^{i\alpha t}$ uneigentl. Riemann integrierbar und es gilt (per Def.) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{i\alpha t} dt = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{i\alpha t} dt$

Sei $R_1 > 1$ sd. $|a_j| < R_1$ für $j = 1,..,K$ gilt und wähle $R \geq \max\{R_1, R_0\}$.

Wir betrachten die (R-abhängige!) Kurve $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, wo

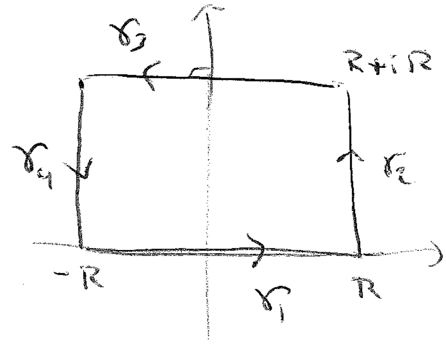
$\gamma_1 : [-R,R] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma_1(t) := t$

$\gamma_2 : [0,R] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma_2(t) := R+it$

$\gamma_3 : [-R,R] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma_3(t) := -t+iR$

$\gamma_4 : [0,R] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma_4(t) := -R+i(R-t)$

Dann ist γ stückweise C^1-Kurve, geschlossen, und es gilt (Residuensatz)



$$\int_\gamma \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \underbrace{n(\gamma, a_j)}_{=1} \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q} e^{i\alpha \cdot}; a_j\right)$$

Für die Kurven $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ gilt:

- $$\left|\int_{\gamma_2} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}\, dz\right| \leq \int_0^R \left|\frac{P(\gamma_2(t))}{Q(\gamma_2(t))}\right| e^{-\alpha \operatorname{Im}(\gamma_2(t))}\, dt$$

$$\leq \int_0^R \frac{C}{|\gamma_2(t)|} e^{-\alpha t}\, dt \leq \int_0^R \frac{C}{R} e^{-\alpha t}\, dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{R}} \frac{C}{R} \underbrace{e^{-\alpha t}}_{\leq 1}\, dt + \int_{\sqrt{R}}^{R} \frac{C}{R} \underbrace{e^{-\alpha t}}_{\leq e^{-\sqrt{R}\alpha}}\, dt \leq$$

$$\leq \frac{C}{\sqrt{R}} + \frac{C(R-\sqrt{R})}{R} e^{-\alpha\sqrt{R}} \xrightarrow{R \to \infty} 0$$

- Analog: $$\left|\int_{\gamma_4} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}\, dz\right| \xrightarrow{R \to \infty} 0$$

- $$\left|\int_{\gamma_3} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}\, dz\right| \leq \int_{-R}^{R} \frac{C}{|\gamma_3(t)|} e^{-\alpha \operatorname{Im}(\gamma_3(t))}\, dt$$

$$\leq \int_{-R}^{R} \frac{C}{R} e^{-\alpha R}\, dt = \frac{2CR}{R} e^{-\alpha R} \xrightarrow{R \to \infty} 0$$

Insgesamt: $$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{i\alpha t}\, dt = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q} e^{i\alpha \cdot}; a_j\right)$$

(ii) Beim Abtippen der Aufgabe ein „$\alpha > 0$" vergessen. Da das Ergebnis mit dem $\alpha > 0$ interessanter ist, rechnen wir in der Lsg. das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx$, $\alpha > 0$.

Idee: Ähnliches vorgehen wie in Teilaufgabe (i), aber diesmal hat das Polynom im Nenner eine Nullstelle, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx \right)$$ ist <u>nicht</u>

sinnvoll, solange die rechte Seite als uneig. R-Integral interpretiert wird ($x \to \frac{e^{i\alpha x}}{x}$ bei 0 nicht uneig. integrierbar)

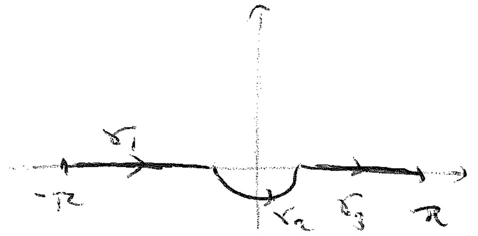
Da aber $\{\sin(i\alpha n)\}_n$, $\{\sin(-i\alpha n)\}_n$ als Folgen (exponentiell) wachsen, können wir die Contourintegrationsmethoden (wie bekannt) nicht für die Fkt. $z \to \frac{e^{i\alpha z}}{z}$ anwenden. Also:

Da $x \to \frac{\sin(\alpha x)}{x}$ uneig. integrierbar ist und bei 0 hebbare Unstetigkeitsstelle gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = \lim_{R \to \infty} \left(\int_{-R}^{-\frac{1}{R}} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx + \int_{\frac{1}{R}}^{R} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx \right)$$

$$= \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_1} \frac{\sin(\alpha z)}{z} dz + \int_{\gamma_2} \frac{\sin(\alpha z)}{z} dz + \int_{\gamma_3} \frac{\sin(\alpha z)}{z} dz$$

mit $\gamma_1 : [-R, -\frac{1}{R}] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma_1(t) := t$
$\gamma_3 : [\frac{1}{R}, R] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma_3(t) := t$
$\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $t \to \gamma_2(t) := \frac{1}{R} e^{i(\pi + t)}$

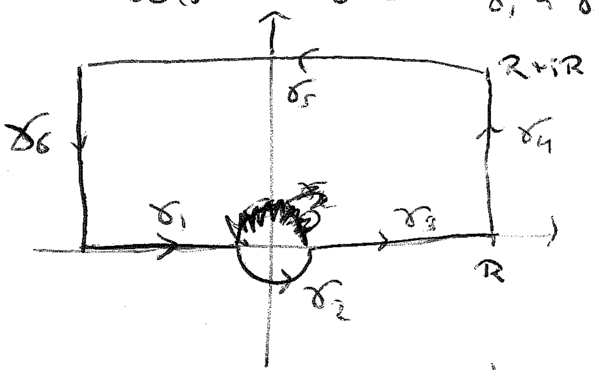


wo die Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ von R abhängen.

Um die ~~Divergenz~~/das Wachstum von $\sin(\alpha z)$ in oberer und unterer Halbebene zu isolieren, schreiben wir $\sin(\alpha z) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha z} - e^{-i\alpha z}\right)$, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \sum_{i=1}^{3} \left(\int_{\gamma_i} \underbrace{\frac{e^{i\alpha z}}{2iz}}_{=:\,f(z)}\,dz - \int_{\gamma_i} \underbrace{\frac{e^{-i\alpha z}}{2iz}}_{=:\,\tilde{f}(z)}\,dz \right) \quad (*)$$

Für f wählen wir die geschlossene stückw. C^1-Kurve γ als $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6$ als



und wie in Teilaufg. (i) gilt

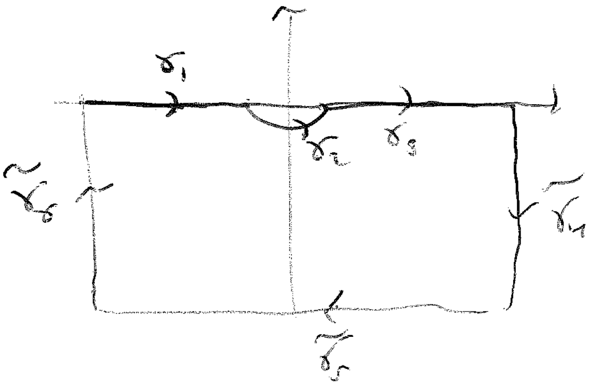
$$\int_{\gamma_i} f(z)\,dz \xrightarrow{R\to\infty} 0, \quad i = 4, 5, 6 \qquad (\Delta)$$

Und mit Residuensatz

$$\underline{\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)}$$

Für $\tilde{f}$ wählen wir die geschl. C^1-Kurve

$\tilde{\gamma} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \tilde{\gamma}_4 + \tilde{\gamma}_5 + \tilde{\gamma}_6$ als



und wie in Teilaufgabe (i) gilt

$$\int_{\tilde{\gamma}_i} \tilde{f}(z)\,dz \xrightarrow{R \to \infty} 0, \quad i = 4, 5, 6. \qquad (\Delta\Delta)$$

Wieder mit Residuensatz

$$\int_{\tilde{\gamma}} \tilde{f}(z)\,dz = 0.$$

Mit $(*)$, (Δ) und $(\Delta\Delta)$ folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx = \lim_{R \to \infty} \left(\int_{\gamma} f(z)\,dz + \int_{\tilde{\gamma}} \tilde{f}(z)\,dz \right) =$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)$$

und es gilt (da $f(z) = \frac{e^{i\alpha z}}{2iz}$ Pol 1. Ord. bei 0)

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} z \frac{e^{i\alpha z}}{2iz} = \frac{1}{2i}$$

Also $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx = \pi$ für <u>alle</u> $\alpha > 0$ (Vsl. mit $\alpha = 0$?)

Aufgabe 3: (i) Mit dem Residuensatz gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\, dz = \sum_{\substack{z \in \mathbb{C} \\ z \text{ Sing. von } g}} n(\gamma, z) \operatorname{Res}(g, z) \quad (*)$$

wobei die Menge der isolierten Singularitäten von g gerade $\mathbb{Z} \cup S$ ist und alle Sing.'s Polstellen 1. Ordnung sind mit

$$\operatorname{Res}(g, n) = f(n) \underbrace{\operatorname{Res}\left(\pi \frac{\cos(\pi \cdot)}{\sin(\pi \cdot)}, n\right)}_{\text{Tutorium}} = f(n) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\operatorname{Res}(g, a_j) = \operatorname{Res}(f, a_j)\ \pi \frac{\cos(\pi a_j)}{\sin(\pi a_j)}.$$

Also können wir $(*)$ schreiben als

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\, dz = \sum_{z \in \mathbb{Z} \cup S} \overbrace{n(\gamma, z)}^{\in \{0,1\}} \operatorname{Res}(g, z) =$$

$$= \sum_{\nu = m}^{n} f(\nu) + \sum_{z \in S \cap \operatorname{Int}(\gamma)} \operatorname{Res}(f, z)\ \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

(ii) Wollen zeigen: Für die Folge von Kurven γ_N mit $\gamma_N : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_N(t) := (N + \frac{1}{2}) e^{it}$, gilt

$$\int_{\gamma_N} g(z)\, dz \xrightarrow{N \to \infty} 0$$

$$(\Delta)\left\{\begin{array}{l}\text{Annahme: Für } \varepsilon \in (0,\tfrac{1}{2}) \text{ sei } S_\varepsilon := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} B(n,\varepsilon), \\ \text{dann } C := \sup\left\{ \left|\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right| : z \in S_\varepsilon^c \right\} < \infty \end{array}\right\}$$

Mit der Annahme gilt dann

$$\left| \int_{\gamma_N} g(z)\, dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} f((N+\tfrac{1}{2})e^{it}) \frac{\pi \cos(\pi (N+\frac{1}{2})e^{it})}{\sin(\pi(N+\frac{1}{2})e^{it})} i(N+\tfrac{1}{2})e^{it}\, dt \right|$$

$$\underset{\substack{N \text{ groß genug} \\ (\mathrm{Ran}(\gamma_N)\cap S_\varepsilon = \emptyset \\ \text{und } N > R)}}{\leq} \int_0^{2\pi} \frac{M(N+\frac{1}{2})}{(N+\frac{1}{2})^2} \underbrace{\sup_{z\in S_\varepsilon^c} \left|\frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right|}_{= C < \infty} \leq$$

$$\leq \frac{2\pi C}{N+\frac{1}{2}} \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

Bleibt also, die Annahme (Δ) zu zeigen.

$$\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = i\, \frac{e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}} = i\left(1 - \frac{2}{e^{2i\pi z}-1}\right)$$

Also hinreichend zu zeigen:

$$\inf_{z\in S_\varepsilon^c} |e^{2\pi i z}-1| > 0$$

Für $z = x+iy$ mit $|y| > \varepsilon$ gilt

$y > \varepsilon$: $|e^{2\pi i z}-1| \geq 1 - e^{-2\pi y} > 1 - e^{-2\pi\varepsilon} > 0$

$y < -\varepsilon$: $|e^{2\pi i z}-1| \geq e^{-2\pi y} - 1 > e^{+2\pi\varepsilon} - 1 > 0$

Also gilt

$$\inf_{z\in S_\varepsilon^c} |e^{2\pi i z}-1| = \min\Big\{ \underbrace{\inf_{\substack{z\in S_\varepsilon^c\\ \mathrm{Im}(z)>\varepsilon}} |e^{2\pi i z}-1|}_{>\sigma},\ \underbrace{\inf_{\substack{z\in S_\varepsilon^c\\ \mathrm{Im}(z)<-\varepsilon}} |e^{2\pi i z}-1|}_{>\sigma},$$

$$\inf_{\substack{z\in S_\varepsilon^c\\ -\varepsilon\le \mathrm{Im}(z)\le\varepsilon}} |e^{2\pi i z}-1| \Big\}$$

Da $z \longmapsto e^{2\pi i z}-1$ $\mathbb{Z}$-periodisch ist, gilt

$$\inf_{\substack{z\in S_\varepsilon^c\\ -\varepsilon\le \mathrm{Im}(z)\le\varepsilon}} |e^{2\pi i z}-1| = \inf\{|e^{2\pi i z}-1| : z\in S_\varepsilon^c,\ \mathrm{Im}(z)\in[-\varepsilon,\varepsilon],\ \mathrm{Re}(z)\in[0,1]\} > \sigma,$$

da $z \to |e^{2\pi i z}-1|$ auf der kompakten Menge $S_\varepsilon^c \cap$ ~~...~~ $\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Im}(z)\in[-\varepsilon,\varepsilon],\ \mathrm{Re}(z)\in[0,1]\}$ keine Nst. hat.

(iii) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+a^2}$ hat iso. Sing.'s $\pm ai \notin \mathbb{Z}$ (da n.V. $a \notin i\mathbb{Z}$), welche Pole 1. Ord. sind

Also $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = -\underbrace{\mathrm{Res}(f,ai)}_{\frac{1}{2ai}} \frac{\pi\cos(\pi a i)}{\sin(\pi a i)}$$

$$- \underbrace{\mathrm{Res}(f,-ai)}_{\frac{-1}{2ai}} \frac{\pi\cos(-\pi a i)}{\sin(-\pi a i)} =$$

$$= \frac{\pi}{a} \, \frac{1+e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}}$$

(iv) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2+a^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} - \frac{1}{2a^2} =$$

$$\overset{(iii)}{=} \frac{\pi}{2a} \frac{1+e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}} - \frac{1}{2a^2}$$

für $a > 0$. Mit dominan. Kgz. gilt

$$\lim_{a \downarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$ also (da der limes $a \downarrow 0$ existiert)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{a \downarrow 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a} \frac{1+e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}} - \frac{1}{2a^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

wo der Grenzwert z.B. mit der Regel von l'Hospital ausgerechnet werden kann.