Übungsblatt 1 zu Funktionentheorie

Aufgabe 1:
Beschreiben sie die geometrische Beziehung der Elemente folgender Mengen:

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| = |z - z_2|\}$ wobei $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(b) $B = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{z} = \overline{z}\right\}$.

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 3\}$.

(d) $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > c\}$ wobei $c \in \mathbb{R}$.

(e) $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \mathrm{Re}(z) + 1\}$.

(f) $F = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = c\}$ wobei $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2:
Berechnen sie den Absolutbetrag und ein Argument zu folgenden komplexen Zahlen:

$$-3 + i; \quad (1+i)^{17} - (1-i)^{17}; \quad i^{4711}; \quad \frac{3+4i}{1-i}; \quad \frac{1+ia}{1-ia}, a \in \mathbb{R}; \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}; \quad (1-i)^n, n \in \mathbb{Z}$$

Aufgabe 3:
Zeigen sie, dass es nicht möglich ist eine totale Ordnung auf $\mathbb{C}$ zu definieren. In anderen Worten, es gibt keine Relation $>$ zwischen komplexen Zahlen, sodass:

(i) Für alle komplexen Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ genau eine der folgenden Aussagen wahr ist: $z > w$ oder $w > z$ oder $z = w$.

(ii) Für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ folgt aus $z_1 > z_2$ die Aussage: $z_1 + z_3 > z_2 + z_3$.

(iii) Für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ mit $z_3 > 0$ folgt aus $z_1 > z_2$ die Aussage: $z_1 z_3 > z_2 z_3$

Hinweis: Überprüfe zunächst ob $i > 0$ möglich ist.

Aufgabe 4:
Eine Menge Ω heisst *bogenweise zusammenhängend*, wenn zwei beliebige Punkte in Ω jeweils durch eine (stückweise glatte) Kurve, die komplett in Ω liegt, verbunden werden können.
In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass eine offene Menge Ω genau dann bogenweise zusammenhängend ist, wenn Ω zusammenhängend ist.

(a) Angenommen Ω ist eine offene und bogenweise zusammenhängende Menge und $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, wobei Ω_1 und Ω_2 disjunkte, nicht-leere, offene Mengen sind.
Wähle zwei Punkte $\omega_1 \in \Omega_1$ und $\omega_2 \in \Omega_2$ und sei γ eine Kurve in Ω, die ω_1 zu ω_2 führt. Betrachte eine Parametrisierung $z : [0,1] \to \Omega$ dieser Kurve mit $z(0) = \omega_1$, $z(1) = \omega_2$ und sei

$$t^* := \sup\{t : z(s) \in \Omega_1 \;\; \forall \;\; 0 \leq s \leq t\}$$

Führen sie einen Widerspruch herbei, indem sie den Punkt $z(t^*)$ betrachten.

(b) Umgekehrt, angenommen Ω ist offen und zusammenhängend. Fixiere einen Punkt $\omega \in \Omega$ und sei $\Omega_1 \subset \Omega$ die Menge aller Punkte, die durch eine Kurve die in Ω liegt, mit ω verbunden werden können. Darüberhinaus, sei $\Omega_2 \subset \Omega$ die Menge aller Punkte, die nicht durch eine Kurve in Ω mit ω verbunden werden können.
Zeigen sie, dass Ω_1 und Ω_2 offen und disjunkt sind und das gilt $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$. Da Ω_1 nicht-leer ist (Warum?) folgern sie daraus, dass wie gewünscht gilt: $\Omega_1 = \Omega$.

Abgabe je Zweiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 20.04.2016 in der Zentralbung.