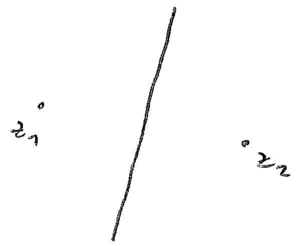
ÜB 1

Aufgabe 1:

(a) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $A = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_1| = |z - z_2| \}$

$z_1 = z_2 \Rightarrow$ alle Punkte in $\mathbb{C}$

$z_1 \neq z_2$

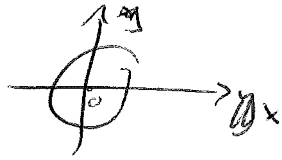


(alle Punkte die den gleichen Abstand zu z_1 und z_2 haben)

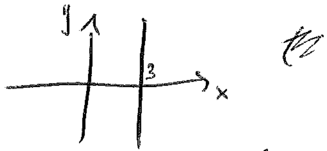
(b) $B = \{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{z} = \bar{z} \}$ $\Rightarrow$ Einheitskreis um 0

$\Leftrightarrow z\bar{z} = 1 = |z|^2$

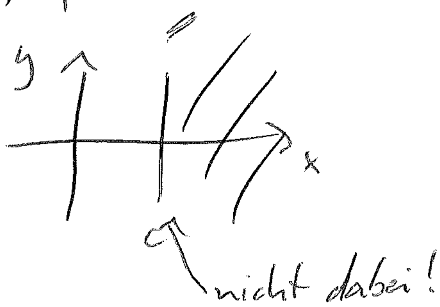
$\Leftrightarrow |z| = 1$



(c) $C = \{ z \in \mathbb{C} : Re(z) = 3 \}$ $\Rightarrow$



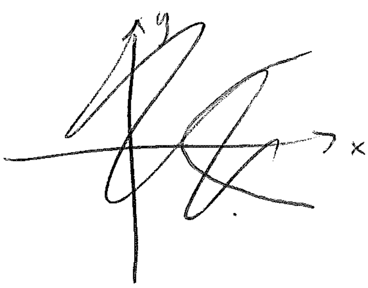
(d) $D = \{ z \in \mathbb{C} : Re(z) > c \}$, $c \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

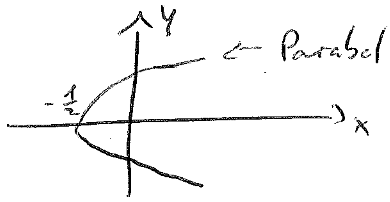


(e) $E = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = Re(z) + 1 \}$

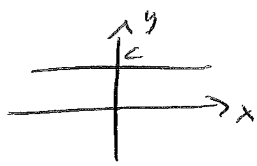
$z = x + iy \Rightarrow |z|^2 = x^2 + y^2 \overset{!}{=} (x+1)^2 \Leftrightarrow y^2 = 2x + 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2}$





(f) $F = \{ z \in \mathbb{C} : Im(z) = c \}$, $c \in \mathbb{R}$



Aufgabe 2:

(i) $z = -3+i \Rightarrow |z| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$, $\varphi = -\arctan(\tfrac{1}{3})$

(ii) $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow (1+i)^{17} = 2^{\frac{17}{2}} e^{i\frac{17}{4}\pi} = \sqrt{2^{17}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow (1-i)^{17} = 2^{\frac{17}{2}} e^{-i\frac{17}{4}\pi} = \sqrt{2^{17}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$\Rightarrow (1+i)^{17} - (1-i)^{17} = \sqrt{2^{17}} \underbrace{\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)}_{2\sin(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}} = 2^9$$

$\Rightarrow |(1+i)^{17} - (1-i)^{17}| = 2^9$

$\varphi = 0$

(iii) $i^{4711} = i \cdot i^{4710} = i \underbrace{(-1)^{2355}}_{=-1} = -i = e^{i\pi}$

$\Rightarrow |i^{4711}| = 1$, $\varphi = \pi$

(iv) $\dfrac{3+4i}{1-i} = \dfrac{(1+i)(3+4i)}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i \Rightarrow \left|\dfrac{3+4i}{1-i}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

$\varphi = -\arctan(7)$

(v) $\dfrac{1+ia}{1-ia} = \dfrac{1}{1+a^2}(1+ia)^2 = \dfrac{1}{1+a^2}(1-a^2+2ia)$

$\Rightarrow \left|\dfrac{1+ia}{1-ia}\right| = \dfrac{1}{1+a^2}\sqrt{(1-a^2)^2+4a^2} = \dfrac{\sqrt{1+a^4+2a^2}}{1+a^2} = 1$

$\varphi = \arctan\left(\dfrac{2a}{1-a^2}\right)$

(vi) aus (v) $\left|\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right| = 1$ und $\varphi = -\arctan(\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

(vii) $(1-i) = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow (1-i)^n = \sqrt{2^n}\, e^{-i\frac{\pi n}{4}} \Rightarrow$ $|1-i|^n = \sqrt{2^n}$

$\varphi = -\frac{\pi n}{4}$

Aufgabe 3:

ÜB 1

Angenommen $\cancel{i \neq 0}$ $\exists$ „$>$": $i > 0$ $(*)$

$\overset{(iii)}{\Rightarrow} -1 = i \cdot i > 0 \cdot i = 0$

$\overset{(iii)}{\Rightarrow} -i = -1 \cdot i > 0 \cdot i = 0$

$\overset{(ii)}{\Rightarrow} 0 = i - i > i + 0 = i$

↯ zu $(*)$.

Genauso führt $0 > i$ zu einem Widerspruch.

$\overset{(i)}{\Rightarrow} i = 0$ ist die einzige Möglichkeit

$\Rightarrow z \cdot i = z \cdot 0 = 0 \Rightarrow z = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Diese Relation wäre eine triviale Ordnung.

↯

Aufgabe 4:

(a) Angenommen $z(t^*) \in \partial \Omega_1$

$\overset{\Omega_1 \text{ open}}{\Rightarrow} \exists B_\delta(z(t^*)) \subset \Omega_1$

aus der Annahme folgt $z(t^* + \varepsilon) \in \Omega_2$

$\Rightarrow |z(t^* + \varepsilon) - z(t^*)| > \delta \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ ↯, denn z ist glatt

(b) Ω_1, Ω_2 sind definiert wie in der Angabe.

* Sei $z \in \Omega_1 \overset{\Omega \text{ offen}}{\underset{z \in \Omega}{\Longrightarrow}} \exists\, B_\delta(z) \subset \Omega$

Sei $s \in B_\delta(z)$ und $f : [0,1] \to \mathbb{C}$

$$t \to st + z(1-t)$$

$\Rightarrow |f(t) - z| = t|s - z| < \delta$

Das Bild von f ist also in $B_\delta(z) \subset \Omega$ enthalten

Wenn wir nun die Wege von ω zu z und von z zu s verbinden, dann sehen wir, dass gilt $s \in \Omega_1$

$\Rightarrow B_\delta(z) \subset \Omega_1 \Rightarrow \Omega_1$ offen

* Angenommen Ω_2 ist nicht offen

$\Rightarrow \exists\, z \in \Omega_2 : B_\delta(z) \cap \Omega_1 \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists\, s \in \Omega_1 \cap B_\delta(z)$

$\Rightarrow$ Wir können dann wie zuvor z zu s ~~nach s zu~~ mit einer Geraden verbinden und ~~dieses~~ Bild der Abb. ~~Kat~~ liegt in $B_\delta(z) \subset \Omega$

$\Rightarrow \omega$ is wegweise ~~zu~~ verbunden mit s und damit auch mit z

$\Rightarrow z \in \Omega_1 \Rightarrow$ ↯ Def. $\Omega_2 \Rightarrow \Omega_2$ offen

$\Rightarrow \Omega_1$ nicht-leer, da $\omega \in \Omega_1$ $\overset{\text{zusammenhängend}}{\Longrightarrow}$ $\Omega_2 = \emptyset$