FUNKTIONENTHEORIE

SoSe 16

S. Bachmann, LMU

Inhalt:

Literatur:

* Remmert/Schumacher: Funktionentheorie 1
* Fischer/Lieb: Einführung in die komplexe Analysis
* Stein/Shakarchi: Complex Analysis
* Freitag/Busam: Funktionentheorie 1

1) Die komplexen Zahlen

- Wir konstruieren $\mathbb{C}$ aus $\mathbb{R}^2$ mit einem bestimmten Produkt und eine Summe, sodass es zu einem Körper wird, und dass es $\mathbb{R}$ erweitert, und dass jedes Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle besitzt. Wir definieren "+" und "·", $(x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2$

* $(x,y)+(u,v) := (x+u,\ y+v)$
* $(x,y)\cdot(u,v) := (xu-yv,\ xv+yu)$

$\rightsquigarrow$ die Körperaxiome gelten:

Assoziativgesetz für beide Verknüpfungen
Kommutativgesetz — " —
Distributivgesetz
Neutrale Elemente:
* für "+": $(0,0)$
* für "·": $(1,0)$

Inverse:
* für "+": $(-x,-y)$
* für "·": falls $(x,y) \in \mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$; ist $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ ~~sei~~ Inverse

Weiter: für $x,y \in \mathbb{R}$:
$(x,0)+(y,0) = (x+y,0)$, $(x,0)(y,0) = (xy,0)$
sodass $\mathbb{R} \simeq \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$.

- Gleichung
$$(x,y)^2 = (-1,0)$$
hat genau zwei Lösungen:

$(x,y)(x,y) = (-1,0) \iff (x^2-y^2, 2xy) = (-1,0)$

$\iff \begin{cases} x^2-y^2 = -1 \\ 2xy = 0 \end{cases}, \quad x,y \in \mathbb{R}$

(Falls $y=0$, dann gilt $x^2=-1$, was keine Lösung hat)

$\iff x = 0$ und $y^2 = 1$

$\iff (x,y) = (0,1)$ oder $(x,y) = (0,-1)$

Wir haben gezeigt: $(0,1)$ ist eine Lösung der Gleichung $z^2 = (-1,0)$

Da $(x,y) = (x,0)(1,0) + (y,0)(0,1)$, schreiben wir $(x,0) = x$; $(0,1) = i$, sodass

$$(x,y) = x \cdot 1 + y \cdot i = x + iy$$

und die zwei Lösungen von

$$z^2 = -1$$

sind $+i$ und $-i$; i: die <u>imaginäre Einheit</u>

- Der Ausdruck $z = x+iy$ ist eine <u>komplexe Zahl</u>, und

$$\{x+iy : x,y \in \mathbb{R}\}$$

ist die <u>komplexe Ebene</u>;

x ist der <u>Realteil</u> von z ; y ist der <u>Imaginärteil</u> von z.

$x = \mathrm{Re}(z)$ $\qquad y = \mathrm{Im}(z)$

und für $z, w \in \mathbb{C}$:

$$z = w \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w) \end{cases}$$

- Komplexe <u>Konjugation</u>: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$: $z \mapsto \bar{z} = x - iy$

Eigenschaften:
- $\bar{\bar{z}} = z$ (Involution)
- $\overline{w+z} = \bar{w} + \bar{z}$
- $\overline{wz} = \bar{w} \cdot \bar{z}$
- $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$; $z = -\bar{z} \iff z \in i\mathbb{R}$

* $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$; $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

• Betrag von z: $\underset{|z|^2}{\underset{\shortparallel}{z\bar{z}}} = x^2+y^2 > 0$ für $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Eigenschaften:
* $|zw| = |z|\cdot|w|$
* $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$; $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$
* $|z+w| \leq |z| + |w|$

• Aus $z\bar{z} = |z|^2$ gilt:

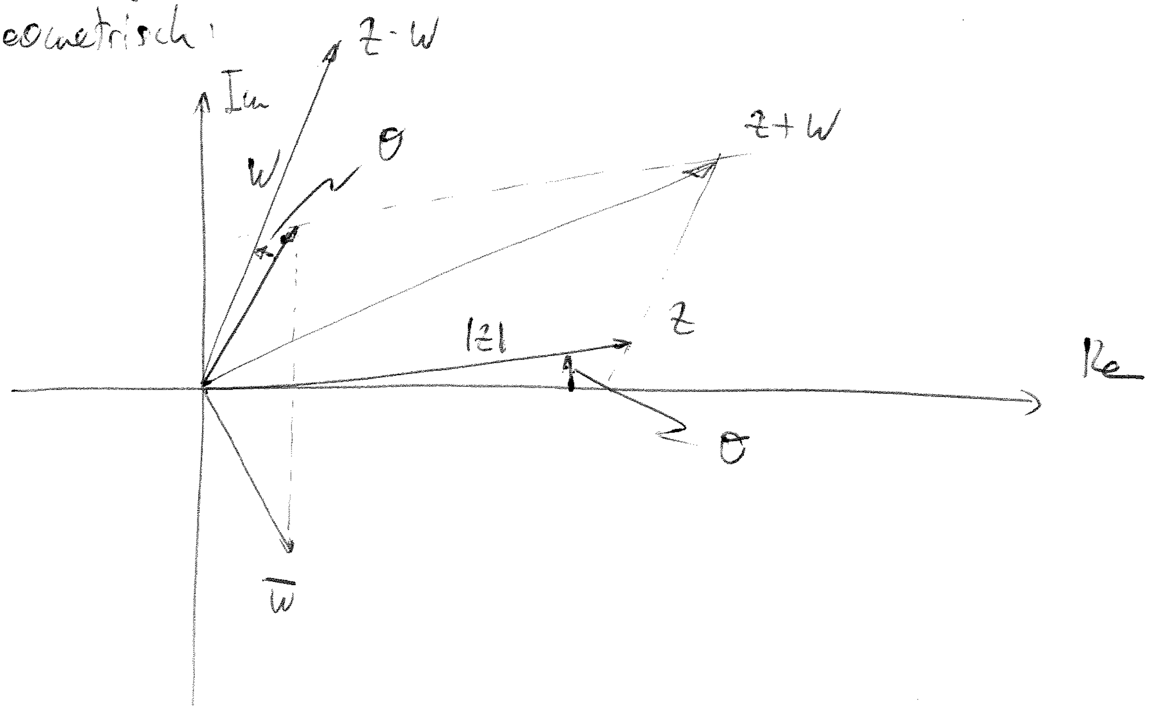
$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

• Polarkoordinatendarstellung:
Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ gilt: $x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

Also $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$
heisst Argument von z
$\theta = \arg(z)$.

Es gilt:
$|zw| = |z||w|$
$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi}$

Geometrisch:



• Satz 1: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau n verschiedene Einheitswurzeln

$$\zeta_\nu := \cos\frac{2\pi\nu}{n} + i\sin\frac{2\pi\nu}{n}, \quad 0 \le \nu < n,$$

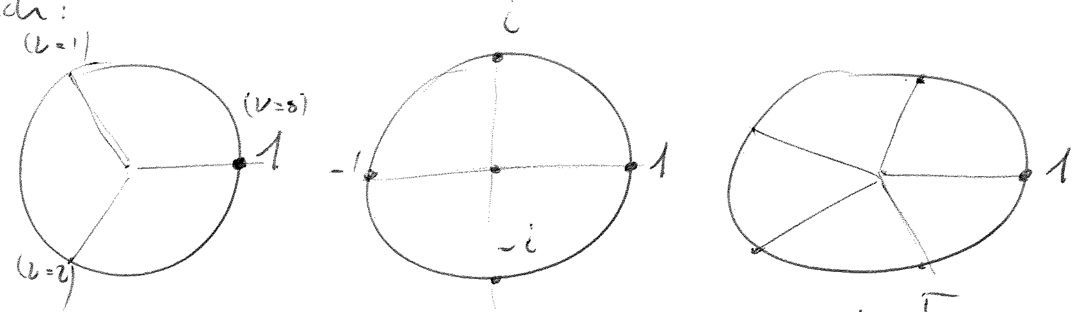
nämlich $(\zeta_\nu)^n = 1$ gilt.

Beweis: Induktiv gilt:

$$\left(r(\cos\theta + i\sin\theta)\right)^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

Diese Zahl ist gleich 1 gdw $r = 1$ und $n\theta$ ist ein Vielfaches von 2π, d.h. $\theta = \frac{2\pi\nu}{n}$ □

• Geometrisch:



$n = 3$ $\quad$ $n = 4$ $\quad$ $n = 5$

• Bemerkungen: i) Die ζ_ν sind also die n Nullstellen des Polynoms n-ter Ordnung $z^n - 1$, und es gilt

$$z^n - 1 = (z - \zeta_0)(z - \zeta_1) \cdots (z - \zeta_{n-1})$$

Das ist ein Spezialfall vom Fundamentalsatz der Algebra (siehe später)

Jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten besitzt so viele Nullstellen, wie sein Grad angibt.

ii) Isomorphismus

$$\mathbb{C} \simeq P := \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

und "+" und "·" entsprechen jetzt die Verknüpfungen von Matrizen.

weiter gilt:

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \underbrace{r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Skalierung}}\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{Drehung}} \quad (\text{in } \mathbb{R}^2).$$

Mit $J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in P$ gilt:

$$P = \{ M \in M_2(\mathbb{R}) : MJ = JM \}$$

iii) Für $N \geq 3$ existieren in $\mathbb{R}^N$ keine Verknüpfungen "+", "·", sodass $\mathbb{R}^N$ zu einem Körper wird.
Im Fall $N = 4$ definiert das Bild $\mathcal{H}$ von

$$H : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$$
$$(z, w) \longmapsto H(z,w) = \begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$$

ein Schiefkörper: in $\mathcal{H}$ gelten alle Körperaxiome ausser dem Kommutativgesetz von "·".

$\mathcal{H}$: "Hamiltonische Quaternionen".

- Eine Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen konvergiert nach $w \in \mathbb{C}$, falls

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - w| = 0 .$$

Man schreibt $w = \lim_{n\to\infty} z_n$.

Das entspricht dem Konvergenzbegriff in $\mathbb{R}^2$. Da $\mathbb{R}^N$ vollständig ist gilt:

<u>Satz 2</u>: $\mathbb{C}$ ist vollständig.

<u>Bem</u>: $w = \lim_{n\to\infty} z_n \iff \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} w \\ \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} w \end{cases}$

2) Holomorphe Funktionen

- Für $z_0 \in \mathbb{C}$, und $r > 0$ definiert man die offene Kreisscheibe $B(z_0, r)$ vom Radius r und mit Zentrum z_0:

$$B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Für eine beliebige Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$: der offene Kern von Ω:

$$\mathrm{int}(\Omega) := \{z \in \mathbb{C} : \exists r > 0 : B(z_0, r) \subset \Omega\}.$$

und Ω heißt:
* offen, wenn $\Omega = \mathrm{int}(\Omega)$
* abgeschlossen, wenn $\mathbb{C} \setminus \Omega$ offen ist
* beschränkt, wenn $\exists M > 0$:
  $|z| < M \quad \forall z \in \Omega$
* kompakt, wenn Ω abgeschlossen und beschränkt ist.

und falls Ω offen ist heißt es zusammenhängend, falls es keine Zerlegung $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ gibt, wobei Ω_1, Ω_2 offen, nicht leer sind und $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

- Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ ist eine offene zusammenhängende Menge.

Bemerkung: $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt bogenweise zusammenhängend, falls es zu je zwei $z, w \in \Omega$ eine ganz in Ω verlaufende, stückweise Kurve existiert, welche z mit w verbindet:

$$\gamma : [0,1] \to \Omega, \quad \gamma(0) = z, \quad \gamma(1) = w$$

Es gilt: $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen:

Ω zusammenh. $\Leftrightarrow$ Ω bogenweise zusammenh.

- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine in Ω definierte komplexwertige Funktion. f heißt stetig in $z \in \Omega$, falls $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:

$$|f(z) - f(w)| < \varepsilon \quad \forall w \in \Omega \cap B(z, \delta)$$

<u>Bem</u>: Äquivalent dazu ist die stetigkeit des Vektorfelder

$\tilde{f}: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in $\tilde{z} = (x, y)$ (wobei $z = x + iy$)

- Weiter <u>konvergiert</u> $f(w)$ gegen ℓ, wenn $w \to z$ in $\mathbb{C}$, falls:

  i) $\forall r > 0$, $\Omega \cap [B(z,r) \setminus \{z\}] \neq \emptyset$

  ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $|f(w) - \ell| < \varepsilon$ $\forall w \in \Omega \cap [B(z,\delta) \setminus \{z\}]$

(Hier gehört z nicht unbedingt zu Ω)

- <u>Definition</u>: $f: \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist <u>komplex differenzierbar</u> in $z \in \mathrm{int}(\Omega)$, falls $\exists\, \ell \in \mathbb{C}$ sodass

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \ell .$$

ℓ ist dann eindeutig und man schreibt $\ell = f'(z)$: die <u>Ableitung</u> von f in z.

- <u>Bem</u>: Äquivalent zur Definition sind:

  i) Die Funktion $g: \Omega \to \mathbb{C}$, definiert durch

  $$f(w) = f(z) + \ell(w - z) + g(w)$$

  ist so, dass $\frac{g(w)}{w - z} \to 0$, falls $w \to z$.

  ii) $$\lim_{\xi \to 0} \frac{f(z+\xi) - f(z)}{\xi} = \ell \Leftrightarrow f(z+\xi) = f(z) + \ell\xi + r(\xi) \quad (*)$$

  wobei $\frac{r(\xi)}{\xi} \to 0 \quad (\xi \to 0)$

und es folgt: f differenzierbar in $z \Rightarrow f$ stetig in z.

- Beispiele:

  i) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}: z \mapsto z$.

  f ist differenzierbar in z für alle $z \in \mathbb{C}$, und $f'(z) = 1$.

  ii) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}: z \mapsto \bar{z}$

  Sei $z = x + iy$, $w = (x+h) + i(y+k)$. Dann ist $w \neq z \Leftrightarrow (h,k) \neq (0,0)$ und

$$\frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \frac{h-ik}{h+ik} \qquad (w \neq z)$$

insbesondere: $\ast$ $\dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} = 1$, falls $k=0$
$(\longrightarrow \cdot \longleftarrow)$

$\ast$ $\dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} = -1$, falls $h=0$
$(\downarrow \cdot \uparrow)$

sodass $\lim\limits_{w\to z} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z}$ nicht existiert.

$\rightsquigarrow$ f ist nirgendwo differenzierbar.

- Bemerkung: Das Vektorfeld $\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
  $$\tilde{f}(x,y) = (x,-y)$$
  ist differenzierbar, $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$
  $\rightsquigarrow$ Obwohl die Definition der Differenzierbarkeit auf das "übliche" Newtonsche Verhältnis beruht, liefert sie ein Konzept echter komplexer Natur.
- Erinnerung: $\ast$ $\tilde{g}: \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist in $(x,y) \in \operatorname{int}(\tilde{\Omega})$ differenzierbar, falls $\exists\, L = (L_1, L_2) \in \mathbb{R}^2$:
  $$\lim_{(r,s)\to(x,y)} \frac{\tilde{g}(r,s) - \tilde{g}(x,y) - \langle (L_1,L_2), (r,s)-(x,y)\rangle}{\|(r,s)-(x,y)\|} = 0$$
  und man schreibt
  $$L = \left(\partial_x \tilde{g}(x,y), \partial_y \tilde{g}(x,y)\right) = \nabla g(x,y)$$
  $\ast$ Ein Vektorfeld $\tilde{f} = (u,v): \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist in (x,y) differenzierbar falls beide Funktionen $u,v: \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im obigen Sinne differenzierbar sind. Man schreibt: -

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x u(x,y) & \partial_y u(x,y) \\ \partial_x v(x,y) & \partial_y v(x,y) \end{pmatrix}$$

__Satz 4__ Sei $f = u + iv : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein komplexe Funktion und $z \in \mathrm{int}(\Omega)$. Dann gilt:

f ist komplex differenzierbar in z

$\Longleftrightarrow$ $\tilde{f} := (\tilde{u}, \tilde{v}) : \hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist differenzierbar in $\tilde{z} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, und $D\tilde{f}(x,y) \in P$,

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

In diesem Fall:

$$f'(z) = \partial_x \tilde{u}(x,y) + i\,\partial_x \hat{v}(x,y)$$
$$= \partial_y \tilde{v}(x,y) - i\,\partial_y u(x,y)$$

• __Bem__: Die Bedingung $D\tilde{f} \in P$ heisst auch

$$\begin{cases} \partial_x u(x,y) = \partial_y v(x,y) \\ \partial_y u(x,y) = -\partial_x v(x,y) \end{cases}$$

"Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichungen".

• __Bew__: $\Rightarrow$ Sei f differenzierbar in $z = x+iy$. Sei

$h = h+ik$, $\ell = \alpha + i\beta$, $r = R_1 + iR_2$

Die $\mathrm{Re}(\cdot)$ und $\mathrm{Im}(\cdot)$ - Teile von (*, S. 7):

$$\begin{cases} u(x+h, y+k) = u(x,y) + (\alpha h - \beta k) + R_1(h,k) \\ v(x+h, y+k) = v(x,y) + (\alpha k + \beta h) + R_2(h,k) \end{cases}$$

wobei

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R_1(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim \frac{R_2(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

wir schreiben:

$$\alpha h - \beta k = \langle (\alpha, -\beta), (h,k) \rangle$$
$$\alpha k + \beta h = \langle (\beta, \alpha), (h,k) \rangle ,$$

sodass $\tilde{u}, \tilde{v}$ in (x,y) differenzierbar sind, und

$$D\tilde{u}(x,y) = (\alpha, -\beta)$$
$$D\tilde{v}(x,y) = (\beta, \alpha)$$

d.h. $D\tilde{f}(x,y) \in P$.

* Sei umgekehrt $\tilde{u}, \tilde{v}$ in (x,y) differenzierbar und $D\tilde{f}(x,y) \in P$. Dann gilt für jedes $\xi = h + ik \in \mathbb{C}$:

$$D\tilde{f}(x,y) \cdot (h,k) = (\partial_x \tilde{u} + i \partial_x \tilde{v}) \cdot (h+ik)$$

reell-lineare Wirkung einer Matrix auf einen Vektor in $\mathbb{R}^2$

Multiplikation in $\mathbb{C}$

Cauchy-Riemann Gl. da $D\tilde{f} \in P$.

und

$$f(z+\xi) - f(z) = (u(z+\xi) - u(z)) + i(v(z+\xi) - v(z))$$
$$= \langle (\partial_x \tilde{u}, \partial_y \tilde{u}), (h,k) \rangle$$
$$+ i \langle (\partial_x \tilde{v}, \partial_y \tilde{v}), (h,k) \rangle$$
$$+ (R_1(h,k) + i R_2(h,k))$$
$$= (\partial_x \tilde{u} + i \partial_x \tilde{v}) \cdot \xi + R(\xi)$$

sodass f in $z = x + iy$ differenzierbar ist, mit

$$f'(z) = \partial_x \tilde{u} + i \partial_x \tilde{v}$$
$$= \partial_y \tilde{v} - i \partial_y \tilde{u} \qquad (\text{by C-R.})$$

$\square$

• Bem. Die Bedingung $M \in P$ impliziert, dass die reell-lineare Abbildung $M: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ einer komplexen Multiplikation entspricht, also auch $\mathbb{C}$-linear ist.

- <u>Def</u>: $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann ist f <u>holomorph in Ω</u>, falls f differenzierbar in z ist, für alle $z \in \Omega$.

- <u>Satz 5</u>: $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$. f ist holomorph in Ω und $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ ist stetig gdw die partiellen Ableitungen von $\tilde{u}, \tilde{v}$ existieren in $\tilde{\Omega}$ und stetig sind und erfüllen die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen.

<u>Bem</u>: Die C.-R. Gleichungen können auch

$$\begin{pmatrix} \partial_x \tilde{v} \\ \partial_y \tilde{v} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \partial_x \tilde{u} \\ \partial_y \tilde{u} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Bew</u>: Direkter Korollar von Satz 4 und dem aus der reellen Analysis bekannten Ergebnis: Existieren die partiellen Ableitungen von $\tilde{u}, \tilde{v}$ und sind sie stetig, dann ist das Vektorfeld $\hat{f} = (\tilde{u}, \tilde{v})$ stetig differenzierbar. $\square$

- <u>Beispiele</u>: i) Zurück zu $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f(z) = \bar{z}$.
  $\tilde{u}(x,y) = x \;;\; \tilde{v}(x,y) = -y \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
  also sind $\tilde{u}, \tilde{v} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, mit $\partial_x \tilde{u} = 1$, $\partial_y \tilde{v} = -1$
  $\partial_x \tilde{v} = 0$, $\partial_y \tilde{u} = 0$: die C.-R. Gl. sind nirgendwo erfüllt, und es existiert keine offene Ω, auf der f holomorph ist.

  ii) Die Exponentialfunktion: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f(z) = e^z$.
  Die Eulersche Formel ergibt

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

also sind

$$\tilde{u}(x,y) = e^x \cos y \quad ; \quad \tilde{v}(x,y) = e^x \sin y \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

und $\tilde{u}, \tilde{v} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$; Weiter:

$$\begin{pmatrix} \partial_x \tilde{v} \\ \partial_y \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \sin y \\ e^x \cos y \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \partial_x \tilde{u} \\ \partial_y \tilde{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ -e^x \sin y \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ f ist in $\Omega = \mathbb{C}$ holomorph, und

$$f'(z) = \partial_x \tilde{u}(x,y) + i \partial_x \tilde{v}(x,y) = e^x(\cos y + i \sin y) = f(z)$$

und $f(0) = 1$.

- Wir werden später beweisen, dass eine holomorphe Funktion in Ω eigentlich unendlich oft differenzierbar ist in Ω. Insbesondere sind $\tilde{u}, \tilde{v} \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und

$$\partial_x(\partial_x \tilde{u}) \underset{C\text{-}R.}{=} \partial_x(\partial_y \tilde{v}) \underset{C^2}{=} \partial_y(\partial_x \tilde{v}) = -\partial_y(\partial_y \tilde{u})$$

$$\Rightarrow \quad \Delta \tilde{u} = 0$$

und genauso $\Delta \tilde{v} = 0$

<u>Def</u>: Sei $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\tilde{u} \in C^2(\tilde{\Omega}, \mathbb{R})$. Eine Funktion $\tilde{v} \in C^2(\tilde{\Omega}, \mathbb{R})$ heisst eine zu $\tilde{u}$ konjugiert harmonische Funktion, falls $\tilde{u}, \tilde{v}$ die C.-R.-Gl. erfüllen.

<u>Bem</u>:
- Sind $\tilde{u}, \tilde{v}$ konjugiert harmonisch, dann sind sie beide harmonisch, d.h. $\Delta \tilde{u} = \Delta \tilde{v} = 0$ in $\tilde{\Omega}$.
- Die Ordnung ist wichtig!
  $\tilde{v}$ ist zu $\tilde{u}$ k.h. $\Leftrightarrow$ $\tilde{u}$ ist zu $-\tilde{v}$ k.h.

- <u>Lemma</u>: 1) $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend, sei $\tilde{u}, \tilde{v}$ und $\tilde{u}, \tilde{w}$ konjugiert harmonisch in $\tilde{\Omega}$. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$\tilde{v}(x,y) - \tilde{w}(x,y) = c \qquad \forall (x,y) \in \tilde{\Omega}.$$

ii) $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ offen und einfach zusammenhängend, sei $\tilde{u} \in C^2(\tilde{\Omega}, \mathbb{R})$, sodass $\Delta\tilde{u} = 0$ in $\tilde{\Omega}$. Dann existiert $\tilde{v} \in C^2(\tilde{\Omega}, \mathbb{R})$, sodass $\tilde{u}, \tilde{v}$ konjugiert harmonisch sind.

<u>Beweis</u>: i) In $\tilde{\Omega}$ gilt: $\nabla\tilde{v} = J\nabla\tilde{u}$ und $\nabla\tilde{w} = J\nabla\tilde{u}$, also $\nabla(\tilde{v} - \tilde{w}) = 0$, und $\tilde{\Omega}$ ist zusammenhängend.

ii) Sei $g(x,y) := (-\partial_y \tilde{u}(x,y), \partial_x \tilde{u}(x,y))$. Es gilt $g \in C^1(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, mit $\partial_x g_2 = \partial_y g_1$ in $\tilde{\Omega}$, da $\tilde{u}$ harmonisch ist. Also ist die Rotation von g gleich 0, und da $\tilde{\Omega}$ einfach zusammenhängend ist, gilt $g = \nabla\tilde{v}$ in $\tilde{\Omega}$, mit $\tilde{v} \in C^1(\tilde{\Omega}, \mathbb{R})$. Also

$$\left.\begin{aligned} \partial_x \tilde{v} &= g_1 = -\partial_y \tilde{u}; \\ \partial_y \tilde{v} &= g_2 = \partial_x \tilde{u}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla\tilde{v} = J\nabla\tilde{u}$$

Weiter ist $\tilde{v} \in C^2(\tilde{\Omega}, \mathbb{R})$, da $g \in C^1(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ □

- <u>Satz 6</u>: i) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$, offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine in Ω holomorphe Funktion.
  Dann sind $\tilde{u}, \tilde{v}$ in $\tilde{\Omega}$ konjugiert harmonisch, und falls Ω zusammenhängend ist $\tilde{v}$ bis auf eine additive Konstante von $\tilde{u}$ bestimmt.

  ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$, offen und einfach zusammenhängend und $\tilde{u} \in C^2(\tilde{\Omega}, \mathbb{R})$, eine in $\tilde{\Omega}$ harmonische Funktion. Dann existiert eine Funktion $\tilde{v} \in C^2(\tilde{\Omega}, \mathbb{R})$, sodass $f = u + iv$ in Ω holomorph ist.

<u>Beweis</u>: i) folgt aus der Diskussion auf S. 12 und dem Lemma (i).

ii) folgt aus dem Lemma (ii). □

- <u>Bem</u>: (ii) "Jede harmonische Funktion ist der Realteil einer holomorphen Funktion".

- <u>Bem</u>: Aus der Definition der Differenzierbarkeit:
  (i) $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$, $z \in \mathrm{Int}(\Omega)$:
  Falls f, g in z differenzierbar sind, dann ist $(f+g)$ in z differenzierbar und
  $$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z).$$
  (ii) $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$, $z \in \mathrm{Int}(\Omega)$:
  Falls f, g in z differenzierbar sind, dann ist (fg) in z differenzierbar und
  $$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$
  (iii) Falls f in z differenzierbar ist, und g in $f(z)$ differenzierbar ist, dann ist $(g \circ f)$ in z differenzierbar und
  $$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))\, f'(z)$$

Es folgt sofort, dass jedes Polynom holomorph in $\mathbb{C}$ ist, und dass $f = \frac{P}{Q}$, wobei P, Q Polynome sind, holomorph in $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$ ist.

- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Falls f konstant ist, dann ist $f'(z) = 0$ $\forall z \in \Omega$. Umgekehrt: falls $f'(z) = 0$ $\forall z \in \Omega$, dann gilt $0 = \partial_x \tilde{u} + i \partial_x \tilde{v}$ ~~$= \partial_x \tilde{u} - i \partial_y \tilde{u}$~~, also $\partial_x \tilde{u} = 0$, $\partial_x \tilde{v} = 0$
  und mit Hilfe der C-R-Gl.: $\partial_y \tilde{u} = 0$, $\partial_y \tilde{v} = 0$.
  Aus der reellen Analysis folgt $\tilde{u}, \tilde{v}$ sind konstant in $\tilde{\Omega}$.
  Also: f ist konstant in $\Omega \iff f'(z) = 0$ $\forall z \in \Omega$.

3. Exp(z) & Log(z)

- Zu jeder Folge $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $z_k \in \mathbb{C}$, gehört eine Folge der Partialsummen $S_n := \sum_{m=0}^{n} z_m$, die zugeordnete Reihe. Falls S_n konvergiert heisst $S := \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} z_m$ die Summe der Reihe.

  S_n heisst absolut konvergent, falls die Reihe $\sum |z_m|$ konvergiert.

  Aus der reellen Analysis folgt: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert absolut.

  ↳ Def: Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist durch
$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (*)$$
definiert.

- Da die Reihe absolut konvergent ist gilt
$$\exp(z)\exp(w) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k w^{n-k}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w) \qquad \forall z,w \in \mathbb{C}.$$

insbesondere gilt $\exp(z)\exp(-z) = \exp(0) = 1$, sodass $\exp(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

weiter:
$$\exp'(z) = \lim_{\xi\to 0}\frac{\exp(z+\xi)-\exp(z)}{\xi} = \exp(z)\lim_{\xi\to 0}\frac{\exp(\xi)-1}{\xi}$$
$$= \exp(z)$$
bei der Definition. $(*)$

- <u>Satz 7</u>: i) $\exp(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

ii) $\exp(\cdot)$ ist in $\mathbb{C}$ holomorph mit

$$\exp'(z) = \exp(z)$$

iii) $\exists$ eine Zahl $\pi > 0$:

$$\exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) = i \quad ; \quad \text{und}$$

$$\exp(z) = 1 \iff z = 2\pi i \cdot n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

iv) exp ist eine periodische Funktion: $\exp(z) = \exp(z + 2\pi i)$

v) $t \mapsto \exp(it)$ ist eine auf der Einheitskreis surjektive Funktion

vi) $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \exists z \in \mathbb{C}: \quad w = \exp(z)$

<u>Beweis</u>: (i), (ii) oben bewiesen.

(iii), (iv): Von $(*)$ folgt, dass $\exp(-it) = \overline{\exp(it)}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, sodass

$$|\exp(it)|^2 = \exp(it)\exp(-it) = \exp(0) = 1$$

$$\Rightarrow |\exp(it)| = 1 \quad (t \text{ reell})$$

Wir definieren also
$$\left.\begin{aligned} \cos(t) &:= \operatorname{Re} \exp(it) \\ \sin(t) &:= \operatorname{Im} \exp(it) \end{aligned}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

sodass $\exp(it) = \cos(t) + i\sin(t)$ (Eulersche Identität)

und nach Differenzierung der beiden Seiten, und bei (ii):

$$\cos'(t) + i\sin'(t) = i\exp(it) = -\sin(t) + i\cos(t)$$

$$\Rightarrow \cos'(t) = -\sin(t) \quad ; \quad \sin'(t) = \cos(t)$$

Weiter folgt wieder aus $(*)$:

$$\cos(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots$$

bei $t = 2$ sind die Terme im Betrag abfallend und mit alternierenden Vorzeichen. Also gilt

$$\cos 2 \leq 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} = -\frac{1}{3}$$

da aber $\cos(0) = 1$ und $\cos(\cdot)$ eine reelle, auf $\mathbb{R}$ definierte stetige Funktion ist $\exists$ ein kleinster t_0, sodass $\cos t_0 = 0$. Sei jetzt

$$\pi := 2t_0$$

Von der Eulerschen Identität und $|\exp(it)| = 1$ folgt $\sin t_0 = \pm 1$. Auf $(0, t_0)$ gilt weiter $\sin'(t) = \cos(t) > 0$ und somit $\sin(t) > 0$, da $\sin(0) = 0$. Da $\sin(\cdot)$ auch stetig ist folgt $\sin(t_0) = +1$ und

$$\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \exp(it_0) = \cos t_0 + i \sin t_0 = i$$

Weiter gilt:

$$\exp(\pi i) = \exp\left(\frac{\pi i}{2}\right)\exp\left(\frac{\pi i}{2}\right) = i^2 = -1$$

und $\exp(2\pi i) = (-1)(-1) = 1$, und Endlich

$$\exp(2\pi i \cdot n) = 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

und weiter für alle $n \in \mathbb{Z}$, da $\exp(z)\exp(-z) = 1$

Wir beweisen noch die Umkehrung davon.

Notation: $e^z := \exp(z)$.

Für $z = x + iy$ gilt $e^z = e^x e^{iy}$, $x, y \in \mathbb{R}$, sodass

$$|e^z| = |e^x||e^{iy}| = e^x$$

und weiter $e^z = 1 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$. Da auch

$$e^{z + 2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$$

zeigen wir, dass $\frac{y}{2\pi} \in \mathbb{Z}$, indem wir zeigen, dass $e^{iy} \neq 1$ für $0 < y < 2\pi$. In dem Fall schreiben wir

$$e^{iy/4} = u + iv$$

da $\frac{y}{4} < \frac{\pi}{2}$ und bei der Definition von π gilt $u > 0$, $v > 0$, und

$$e^{iy} = (u+iv)^4 = (u^4 - 6u^2v^2 + v^4) + i\, 4uv(u^2 - v^2) \quad (**)$$

e^{iy} ist also reell, gdw $u^2 - v^2 = 0$, und da $u^2 + v^2 = |e^{iy}| = 1$, gdw $u^2 = v^2 = \frac{1}{2}$. In dem Fall lautet $(**)$

$$e^{iy} = -1 \neq 1 \quad , \text{ wie zu beweisen ist.}$$

(v) Wir haben schon gezeigt: $e^{it} \in$ Einheitskreis, $t \in \mathbb{R}$.
Sei w: $|w| = 1$, $w = u + iv$.

a) $u \geq 0$, $v \geq 0$.
Da $u \leq 1$, bei der Def von π existiert $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, sodass $\cos t = u$, und dann $\sin^2 t = 1 - u^2 = v^2$. Da $\sin t \geq 0$ $(0 \leq t \leq \pi/2)$ gilt $\sin t = v$, also

$$w = \cos t + i \sin t = \exp(it)$$

b) $u < 0$, $v \geq 0$: dann betrachtet man $-iw$: $\exists t \in \mathbb{R}$:

$$-iw = e^{it} \xleftarrow{\text{und (a)}} \begin{cases} \mathrm{Re}(-iw) = \mathrm{Im}(w) \geq 0 \\ \mathrm{Im}(-iw) = -\mathrm{Re}(w) > 0 \end{cases}$$

also $w = e^{i(t + \pi/2)}$

c) ~~$u<0$~~, $v < 0$: mit (a, b): $-w = e^{it}$, also

$$w = e^{i(t+\pi)}$$

(vi) Da $w \neq 0$, gilt $|w| = 0$ und $\hat{w} := \frac{w}{|w|}$ ist wohl definiert, und $|\hat{w}| = 1$. Bei (v) $\exists\, y \in \mathbb{R}: \hat{w} = e^{iy}$.
Da $|w| > 0$, $\exists\, x \in \mathbb{R}$: $|w| = e^x$. Insgesamt:

$$w = |w|\hat{w} = e^x e^{iy} = e^{x+iy}$$

$\square$

- **Bem**: Aus (i), (iii) folgt: $\exp(z) = \exp(w) \Rightarrow w - z = 2\pi i n,\ n \in \mathbb{Z}$.
  Tatsächlich: $0 = \exp(z) - \exp(w)$
  $= \exp(z)\left(1 - \exp(w-z)\right)$
  $\Rightarrow \exp(w-z) = 1$

  Sei $S_p := \{ z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi \}$
  Die Einschränkung von $\exp(\cdot)$ auf S_p ist also injektiv.
  Aus (ii) (und (iv)) ist es auch surjektiv mit Wertevorrat $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

  $\Rightarrow$ $\exp : S_p \to \mathbb{C}^*$ ist <u>bijektiv</u>

  Insbesondere existiert zu jedem $w \in \mathbb{C}^*$ eine eindeutige komplexe Zahl $z \in S_p$: $w = \exp(z)$

Def: $(\exp)^{-1} =: \ln : \mathbb{C}^* \to S_p$ heisst der Hauptwert des Logarithmus.

In der Notation von oben: $z = \log w$.

- **Satz 8**: Es gilt für $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\log z = \log |z| + i \arg z$$

wobei $\arg z$ die eindeutige reelle Zahl θ, sodass

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i \sin\theta = \exp(i\theta)$$

Beweis: Per Definition gilt $\operatorname{Im}\Big(\overbrace{\cancel{\log z}}^{\log|z| + i\arg(z)}\Big) \in (-\pi, \pi]$, nämlich

$$\log z \in S_p \quad \forall\, z \in \mathbb{C}^*.$$

Weiter: $\exp(\log z) = \exp(\log|z|)\exp(i \arg z)$
$= |z| \cdot \frac{z}{|z|} = z$. $\square$

- **Bem**: * Wir haben also $\exp(\log z) = z \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$

Aber

$$\log(\exp(z)) = \log \underbrace{|\exp(z)|}_{e^{\operatorname{Re} z}} + i\,\underbrace{\arg(\exp(z))}_{\operatorname{Im} z + 2\pi n \,\in (-\pi,\pi]}$$

$$= z + i2\pi n \quad , \; n \in \mathbb{Z}.$$

also $\log(\exp(z)) = z$ nur dann, falls $z \in S_0$.

* Eine ähnliche Überlegung liefert

$$\log(zw) = \log(z) + \log(w) + i2\pi n$$

wobei $n = \begin{cases} 1 & \text{falls } \arg z + \arg w \le -\pi \\ 0 & \text{falls } \arg z + \arg w \in (-\pi,\pi] \\ -1 & \text{falls } \arg z + \arg w > \pi \end{cases}$

Insbesondere ist log auch für negative reelle Zahlen definiert:

$x > 0$: $\quad -x = x\exp(i\pi)$

sodass $\quad \log(-x) = \log(x) + i\pi$

da aber $\log(x\exp(i(\pi+\varepsilon))) = \log(x) - i(\pi-\varepsilon)$ ist log

auf $\{z \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re} z < 0,\ \operatorname{Im} z = 0\}$ nicht stetig

- <u>Satz 9</u>: Sei $\Omega := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \le 0, \operatorname{Im} z = 0\}$.

Dann ist log auf Ω holomorph, mit

$$\log'(z) = \frac{1}{z} \quad , \; z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$$

<u>Beweis</u>: Aus der Definition: $\quad \tilde{u}(x,y) = \ln r(x,y)$
$\tilde{v}(x,y) = \theta(x,y)$

also $\tilde{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\})$, $D\tilde{u} = \frac{1}{r^2}(x,y)$

$\tilde{v} \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_-)$, $D\tilde{v} = \frac{1}{r^2}(-y,x)$

Also ist das Vektorfeld $\tilde{f} = (u, v) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_-, \mathbb{R}^2)$ und es erfüllt die C.-R.-Gl. auf $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_-$.

$$f'(z) = \partial_x \tilde{u} + i \partial_x \tilde{v} = \frac{1}{r^2}(x - iy) = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z} \qquad \square$$

- Bem: Sei $D_\varphi := \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \varphi\} \cup \{0\}$. Dann existiert ein Zweig des Logarithmus, der in $\mathbb{C} \setminus D_\varphi$ holomorph ist.
- Die Funktionen cos, sin können auf ganz $\mathbb{C}$ erweitert werden:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$
$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \qquad z \in \mathbb{C}$$

und ähnlich

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})$$
$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z})$$

4) Kurvenintegrale & Stammfunktionen

- Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ein <u>C^1-Weg</u> in Ω ist eine Funktion $\gamma : [a,b] \to \Omega$, die stetig und stückweise C^1 ist.

$\exists$ Zerlegung $\underset{t_0}{a} < t_1 < t_2 \dots < t_{n-1} < \underset{t_n}{b}$, sodass

$$\gamma\restriction_{(t_j, t_{j+1})} \in C^1\big((t_j, t_{j+1})\big) \quad 0 \le j \le n-1 .$$

und $\lim_{t \searrow t_j} \gamma'(t)$, $\lim_{t \nearrow t_{j+1}} \gamma'(t)$ existieren.

(also lässt sich $\gamma'\restriction_{(t_j, t_{j+1})}$ zu einer stetigen Funktion auf $[t_j, t_{j+1}]$ erweitern)

- Für einen beliebigen $\gamma : [a,b] \to \Omega$ und eine gegebene Zerlegung $Z = (t_0, \dots t_n)$ von $[a,b]$ heisst

$$L_Z(\gamma) = \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)|$$

die Länge des Streckenzuges $(\gamma(t_0), \dots \gamma(t_n))$ in $\mathbb{C}$, und

$$L(\gamma) := \sup \{ L_Z(\gamma) : Z \text{ Zerlegung von } [a,b] \}$$

heisst die <u>Länge</u> (oder totale Variation) von γ.
Falls $L(\gamma) < \infty$ heisst γ <u>rektifizierbar</u>.

- <u>Bem</u>: * Falls γ ein stückweiser C^1-Weg ist, gilt $L(\gamma) < \infty$ und

$$L(\gamma) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt .$$

* Seien $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ zwei C^1-Wege, mit $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Dann:

(*) $\gamma_1 + \gamma_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \to \mathbb{C}$

$$t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

ist der Summenweg und

$$-\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto \gamma_1(a_1 + b_1 - t)$$

ist der inverse Weg, beide wieder stückweise $\mathbb{C}^1$..

- Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, γ ein C^1-Weg in Ω, und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Wir definieren das komplexe Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

wobei die rechte Seite wieder als $\sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\dots)\,dr$ zu lesen ist, also als Summe von Riemannintegralen.

- Bem. Die Funktion $t \mapsto f(\gamma(t))\,\gamma'(t)$ kann als endliche Summe von Produkten von der stetigen Funktion $(f \circ \gamma) \cdot \gamma'$ mit der Charakteristischen Funktion $\chi_{(t_j, t_{j+1})}$. Daher ist $t \mapsto f(\gamma(t))\,\gamma'(t)$ messbar und beschränkt, also auch Lebesgue integrierbar.

- Elementare Eigenschaften:
  - Linearität: $\int_\gamma (f(z) + \alpha g(z))\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \alpha \int_\gamma g(z)\,dz$
  - $\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_{-\gamma} f(z)\,dz$
  - γ_1, γ_2 wie in (*): $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

- Parameterwechsel. Sei:

$\theta : [a,b] \to [c,d]$, C^1 und streng monoton.
$\delta : [c,d] \to \Omega$, stückweise C^1
$\gamma : [a,b] \to \Omega$, $\gamma := \delta \circ \theta$, stückweise C^1.

Dann gilt:

$$\int_\delta f(t)\,dt = \pm \int_\gamma f(t)\,dt$$

mit $\begin{cases} + \\ - \end{cases}$, falls $\theta \begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$ ist. $\begin{matrix} (W) \\ (F) \end{matrix}$

Tatsächlich: Zur Zerlegung $(t_0, t_1, \dots, t_n)$ von $[c,d]$ gehört eine Zerlegung $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ von $[a,b]$, sodass

$$\theta([s_j, s_{j+1}]) = \begin{cases} [t_j, t_{j+1}] & (W) \\ [t_{n-j}, t_{n-j-1}] & (F) \end{cases}, \text{ und}$$

$$\int_\gamma f(t)\,dt = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} f(\delta\circ\theta(s))\,\delta'(\theta(s))\,\theta'(s)\,ds$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \begin{Bmatrix} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \\ \int_{t_{n-j}}^{t_{n-j-1}} \end{Bmatrix} f(\delta(t))\,\delta'(t)\,dt = \pm \int_\delta f(t)\,dt.$$

Dies zeigt, dass $\int_\gamma f(t)\,dt$ nur von der Spur $\gamma([a,b]) \subset \Omega$ und der Orientierung von γ abhängt, aber nicht von der Parametrisierung vom Weg.

- Konvergenz: $\gamma : [a,b] \to \Omega$, stückweise C^1,
$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen in Ω, die gleichmässig gegen f konvergiert.
(d.h. $\lim_{n\to\infty} \left(\sup\{ |f_n(z) - f(z)| : z \in \Omega\} \right) = 0$)

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(t)\,dt = \int_\gamma f(t)\,dt.$$

<u>Bew</u>: * g stetig und $\gamma([a,b])$ kompakt $\Rightarrow$

$$M := \sup\{|g(t)| : t \in \gamma([a,b])\} < \infty.$$

Also gilt:

$$\left|\int_\gamma g(t)\,dt\right| = \left|\int_a^b g(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\right|$$

$$\leq M \cdot \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = M \cdot L(\gamma)$$

* f ist stetig als uniformer Limes von stetigen f_n, also ist $\int_\gamma f(t)\,dt$ wohl definiert. Mit $g_n = f_n - f$ gilt

$$\left|\int_\gamma f_n(t)\,dt - \int_\gamma f(t)\,dt\right| = \left|\int_\gamma g_n(t)\,dt\right|$$

$$\leq \sup\{|g_n(t)| : t \in \gamma([a,b])\} \cdot L(\gamma) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\square$

* Sei $f: \Omega \to \mathbb{C}$, stetig, Ω offen. Eine Funktion $F: \Omega \to \mathbb{C}$ heisst <u>Stammfunktion</u> von f, falls F eine Holomorphe Funktion in Ω ist, und $F'(t) = f(t)$ $\forall t \in \Omega$.

Es gilt, für $\gamma: [a,b] \to \Omega$, stückweise C^1:

$$\int_\gamma f(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Sei $(t_0, \dots, t_n)$ eine Zerlegung von $[a,b]$, sodass $\gamma\restriction_{(t_j, t_{j+1})} \in C^1$ ist. Somit ist $(F\circ\gamma)\restriction_{(t_j,t_{j+1})} \in C^1$,

mit $\frac{d}{dt}(F\circ\gamma) = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$, $t \in (t_j, t_{j+1})$.

Da F holomorph ist, ist es auch stetig, und somit auch $F\circ\gamma$, also: $\lim\limits_{t\searrow t_j}(F\circ\gamma)(t) = F(\gamma(t_j)) = \lim\limits_{t\nearrow t_j}(F\circ\gamma)(t)$.

Daher:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{j=0}^{n-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}\Big((F\circ\gamma)(t)\Big)_{t=t_j}^{t=t_{j+1}} = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

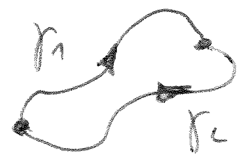
<u>Satz 10</u>: Sei $\Omega\subset\mathbb{C}$ offen und $f:\Omega\to\mathbb{C}$ stetig, so dass f eine Stammfunktion $F:\Omega\to\mathbb{C}$ besitzt. Sei γ ein C^1-Weg in Ω.

(i) $\int_\gamma f(z)\,dz$ hängt nur von den Werten von F am Rand von γ: $\gamma(a), \gamma(b)$.

(ii) Das Integral von f über jede in Ω verlaufende geschlossene Kurve verschwindet
($\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ heißt geschlossen, falls $\gamma(a)=\gamma(b)$).

<u>Beweis</u>: (i) ist die obige Bemerkung.

(ii) Seien γ_1, γ_2 zwei C^1-Wege mit denselben Anfangs- und Endpunkten.



Mit (i) gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

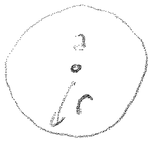
$$\Leftrightarrow \int_{\gamma_1+(-\gamma_2)} f(z)\,dz = 0$$

□

• <u>Bemerkung</u>: Wir betrachten $f(z) = (z-a)^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$, auf $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ definiert. Dann ist f holomorph auf Ω.

Sei $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longmapsto \gamma(t) = a + re^{it}$



$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} (r^n e^{int}) \cdot (ire^{it})\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\, dt \cdot ir^{n+1}$$

$$= \begin{cases} 2\pi & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases} \cdot ir^{n+1}$$

$\Rightarrow$ (i) $z \longmapsto (z-a)^{-1}$ besitzt keine Stammfunktion

(ii) der Satz besagt nichts im Fall $n \neq -1$, das Ergebnis lässt sich aber dadurch erklären, dass $z \longmapsto (z-a)^n$ $(n \neq -1)$ eine Stammfunktion besitzt, nämlich

$$\frac{1}{n+1}(z-a)^{n+1}$$

$\rightsquigarrow$ wichtige Formel:

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a}\, dz = 2\pi i$$

für jeden Kreis um a, unabhängig von deren Radius.

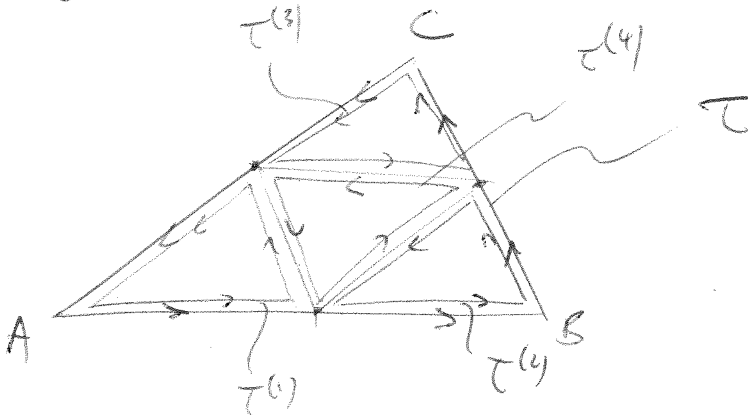
5) Der Cauchysche Integralsatz

- Die Version von Goursat:

Satz 11 $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Sei f holomorph in Ω. Seien $A, B, C \in \Omega$, sodass die von ihnen aufgespannte Dreiecksfläche ganz in Ω enthalten ist. Dann gilt

$$\int_\tau f(z)\,dz = 0$$

Beweis:



Sei $I := \int_\tau f(z)\,dz$; $I = I^{(1)} + I^{(2)} + I^{(3)} + I^{(4)}$

mit $I^{(j)} := \int_{\tau^{(j)}} f(z)\,dz$;

Da $|I| \le |I^{(1)}| + |I^{(2)}| + |I^{(3)}| + |I^{(4)}|$, existiert ein $1 \le j \le 4$, sodass $|I^{(j)}| \ge \frac{1}{4}|I|$

Sei $\tau_1 := \tau^{(j)}$ und $I_1 := \int_{\tau_1} f(z)\,dz$

Die von τ_1 aufgespannte Dreiecksfläche liegt wieder in Ω, also können wir induktiv Dreieckswege τ_n definieren, sodass $|I_{n+1}| \ge \frac{1}{4}|I_n| \quad (n \ge 1)$

also

$$|I| \le 4^n |I_n|$$

Außerdem gilt $L(\tau_n) = \frac{1}{2^n} L(\tau)$

Seien weiter T_n die Dreiecksflächen von τ_n.

$$T \supset T_1 \supset \dots$$

$\Rightarrow \exists\ z_0 \in \bigcap_{n \geq 1} \overline{T_n}$. Da f differenzierbar ist:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\left(f'(z_0) + g(z, z_0)\right)$$

wobei $|g(z, z_0)| \to 0 \quad (|z - z_0| \to 0)$

Da $\int_{\tau_n} f(z_0)\,dz = 0$; $\int_{\tau_n} (z - z_0)\,dz = 0$, gilt

$$I_n = \int_{\tau_n} (z - z_0)\, g(z, z_0)\, dz \qquad (*)$$

Sei jetzt $B_n := B(z_0, L_n)$. Falls $z \in \overline{T_n}$ gilt $|z - z_0| < L_n$, sodass $\overline{T_n} \subset B_n$. Ausserdem ist $B_n \subset \Omega$ für $n \geq n_0$, da $L_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Sei
$$M_n := \sup \{ |g(z, z_0)| : z \in B_n \}$$

für $n \geq n_0$. Aus $(*)$ folgt jetzt

$$|I_n| \leq L_n \cdot L_n \cdot M_n = \frac{1}{4^n} L(\tau)^2 M_n \qquad (n \geq n_0)$$

$$\Rightarrow \quad |I| \leq L(\tau)^2 M_n \quad \forall\, n \geq n_0$$

also $|I| = 0$, da $M_n \to 0$ $(n \to \infty)$ $\square$

- Ein <u>Sterngebiet</u> ist eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft: $\exists\ z_* \in \Omega$, sodass (für jeden $z \in \Omega$) die Verbindungsstrecke
$$[z_*, z] := \{ z_* + t(z - z_*) : t \in [0,1] \} \in \Omega .$$

(insbesondere ist ein Sterngebiet ein Gebiet!)

- <u>Bem</u>: Jede (nicht leere) konvexe, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ ist ein Sterngebiet

- <u>Satz 12</u>: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und $f: \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann existiert eine Stammfunktion. Insbesondere

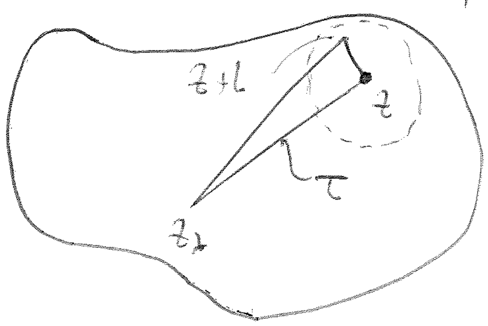
$$\int_\gamma f(t)\,dt = 0$$

für jeden in Ω verlaufenden geschlossenen C^1-Weg.

<u>Beweis</u>: Sei z_* ein Sternmittelpunkt von Ω, und sei

$$F(z) := \int_{[z_*, z]} f(w)\,dw \qquad \forall z \in \Omega.$$

Für h mit $|h|$ klein genug ist $z+h \subset \Omega$ und daher auch $[z_*, z+h]$, sodass



$$\int_\tau f(w)\,dw = 0$$

Das heisst auch
$$F(z) + \int_{[z,z+h]} f(w)\,dw - F(z+h) = 0.$$

Da $\int_{[z,z+h]} f(w)\,dw = h \int_0^1 f(z+th)\,dt$ gilt

$$I(h) = \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \int_0^1 \big(f(z+th) - f(z)\big)\,dt$$

und daher

$$|I(h)| \leq \sup\{ |f(w) - f(z)| : |w-z| \leq |h| \} \to 0$$

$(h \to 0)$, da f stetig in z ist.

Wir haben also bewiesen: $F'(z)$ existiert und $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in \Omega$. Dass $\int_\gamma f(z)dz = 0$ folgt aus Satz 11. $\square$

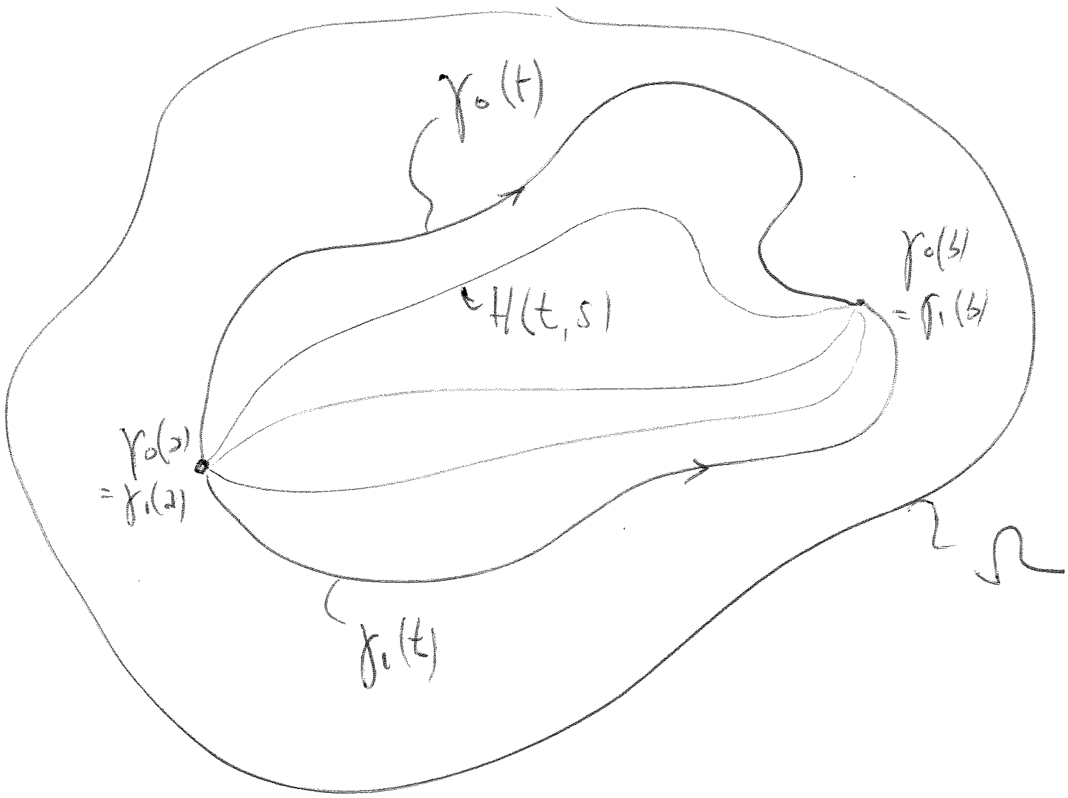
- **Bem**: * Allgemeiner: Ω offen, zusammenhängend. Jede holomorphe Funktion auf Ω besitzt eine Stammfunktion gdw $\exists\ \varphi : \Omega \to \mathbb{C}$, stetig und bijektiv und sodass φ^{-1} ist stetig. → s. später. Ω heisst "Elementargebiet"
  * Da ein Ball sternförmig ist zeigt Satz 12, dass jede Holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine lokale Stammfunktion besitzt: $\forall a \in \Omega\ \exists r > 0$: $B(a,r) \subset \Omega$ und f hat eine Stammfunktion auf $B(a,r)$. Das Problem des "Kleben" dieser lokalen Stammfunktionen zu einer globalen Stammfunktion hat nur dann eine Lösung, wenn Ω wie oben ist.
  * Falls Ω ein Gebiet ist und $F' = f$ auf Ω, dann ist F bis auf einer Konstante eindeutig, da

$$(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$$

und die Bemerkung auf Seite ⌊14.

- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Zwei stetige Abbildungen $\gamma_0 : [a,b] \to \Omega$, $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$, $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ heissen <u>homotop in Ω</u>, wenn es eine stetige Abbildung $H : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ existiert, wobei
  i) $H(t,0) = \gamma_0(t)$; $H(t,1) = \gamma_1(t)$ $\quad \forall t \in [a,b]$.
  ii) $H(a,s) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$; $H(b,s) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ $\quad \forall s \in [0,1]$

H ist eine Homotopie von γ_0 zu γ_1.



- **Satz 13**: $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Sind γ_0, γ_1 C^1-Wege in Ω, die in Ω ~~holomorph~~ homotop sind, dann gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

Beweis: Wir akzeptieren folgende Tatsache: $\exists$ eine Homotopie H von γ_0 zu γ_1, sodass $\gamma_s(\cdot) = H(\cdot, s)$ ein C^1-Weg ist. Sei jetzt

$$C(s) := \int_{\gamma_s} f(z)\,dz$$

Sei $s_0 \in [0,1]$, und $\delta = \frac{1}{2}\operatorname{dist}\left(\mathrm{Ran}(\gamma_{s_0}), \mathbb{C}\setminus\Omega\right)$ (oder $\delta = 1$ falls $\Omega = \mathbb{C}$). Dann ist

$$\{U_t = B(\gamma_{s_0}(t), \delta) : t \in [a,b]\} \qquad (*)$$

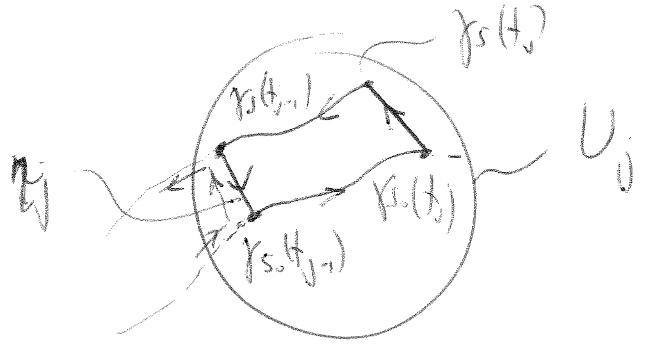
eine offene Überdeckung von $\mathrm{Ran}(\gamma_{s_0})$ in Ω.

Da $\mathrm{Bild}(\gamma_{s_0})$ kompakt ist, existiert eine Zerlegung $(t_0, \dots, t_n)$ von $[a,b]$ und $U_1, \dots, U_n$ in $(*)$, sodass

$$\gamma_{s_0}([t_{j-1}, t_j]) \subset U_j \qquad \text{(s. Aufgaben)}$$

Da die stetige Abbildung H auf einer kompakten Menge $[a,b] \times [0,1]$ definiert ist, ist H gleichmässig stetig. Daher existiert $\varepsilon > 0$, sodass

$$|s - s_0| < \varepsilon \text{ und } t \in [t_{j-1}, t_j] \Rightarrow \gamma_s(t) \subset U_j$$



$(1 \leq j \leq n)$

Für $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$, sei η_j der oben abgebildete geschlossene C^1-Weg. Da U_j eine Kreisscheibe ist, also ein Sterngebiet, gilt mit Satz 12

$$\int_{\eta_j} f(z)\,dz = 0,$$

und daher

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \int_{\eta_j} f(z)\,dz = \int_{\gamma_{s_0}} f(z)\,dz - \int_{\gamma_s} f(z)\,dz,$$

da die Beiträge entlang der geraden Abschnitte sich gegenseitig aufheben, und $\gamma_{s_0}(a) = \gamma_s(a)$; $\gamma_{s_0}(b) = \gamma_s(b)$.

Also: $\forall s_0 \in [0,1]$, $\exists\, \varepsilon > 0$, sodass

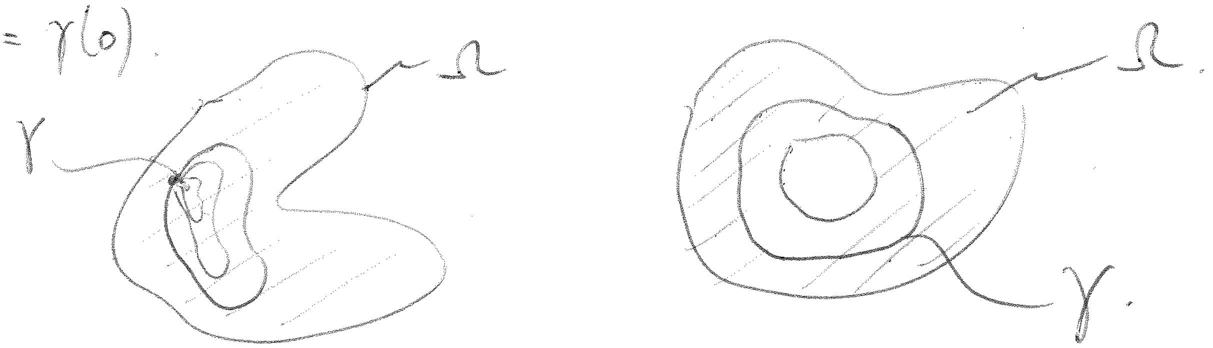
$$s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \Rightarrow C(s) = C(s_0)$$

Die Menge $K := \{ s \in [0,1] : C(s) = C(0) \}$ ist also relativ offen. Aus demselben Argument folgt, dass $[0,1] \setminus K$ relativ offen ist, sodass K relativ abgeschlossen ist. Daher gilt: $K = [0,1]$

$\square$

- Eine Schleifenhomotopie ist eine Homotopie $H(t,s)$, sodass $\gamma_s(\cdot) = H(\cdot, s)$ für alle s eine Schleife (geschlossener Weg) ist.

Ein Gebiet Ω ist einfach zusammenhängend, wenn jede Schleife in Ω nullhomotop ist, nämlich homotop zur Schleife $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(0)$.



Korollar. Sei Ω einfach zusammenhängend und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

für jeden in Ω verlaufenden geschlossenen C^1-Weg.

- Satz 14: Sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, mit $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ auch holomorph und so, dass $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$. Dann gilt:

i) $\exists\ h : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, sodass

$$f = \exp(h)$$

(ii) $\forall\ n = 2, 3, \ldots,\ \exists\ g_n : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, sodass

$$(g_n)^n = f.$$

• Bemerkung: i) Die Annahme: f' holomorph ist eigentlich keine Einschränkung (s. später)

ii) Man könnte auch

$$h = \log f \quad \text{und} \quad g_n = f^{1/n}$$

schreiben.

<u>Beweis</u>: i) Sei $z_0 \in \Omega$. Mit Satz 7 $\exists\, h_0 \in \mathbb{C}$, sodass

$$f(z_0) = \exp(h_0)$$

Da Ω einfach zusammenhängend ist gilt $\int_\gamma g(z)\,dz = 0$ für jede holomorphe Funktion und jeden geschlossenen C^1-Weg. Insbesondere existiert eine Stammfunktion $G' = g$.

Hier ist aber die Funktion f'/f eine holomorphe Funktion in Ω, sodass $\exists\, F$: $F' = f'/f$.

Sei

$$g(z) := f(z)\exp(-h_0 + F(z_0) - F(z))$$

für die

* $g(z_0) = \exp(h_0)\exp(-h_0) = 1$
* $g'(z) = f'(z)\exp(\ldots) - f(z)F'(z)\exp(\ldots) = 0$

gilt. Daher ist $g(z) = 1 \;\; \forall z \in \Omega$ und

$$f(z) = \exp(\underbrace{F(z) - F(z_0) + h_0}_{=:h(z) \text{ holomorph}})$$

ii) Mit h wie in (i) definieren wir

$$g_n := \exp\left(\frac{h}{n}\right)$$

Es folgt:

$$(g_n(z))^n = \exp\left(\frac{h(z)}{n}\right)^n = \exp(h(z)) = f(z)$$

$\square$

- Die Cauchysche Integralformel für die Kreisscheibe.

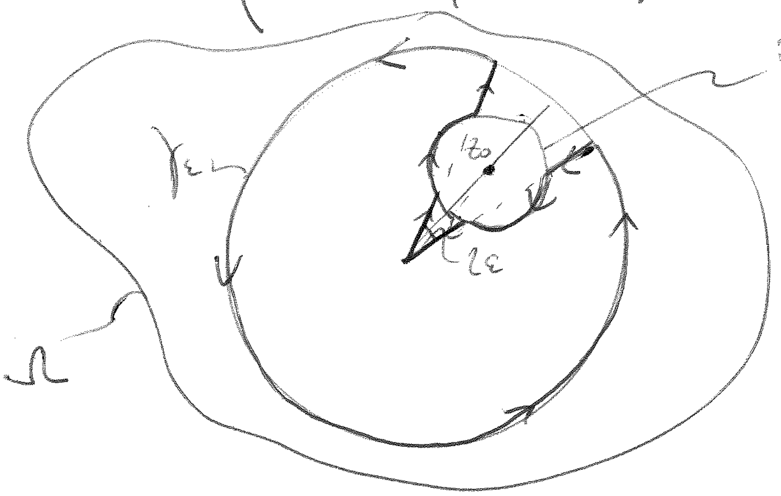
<u>Satz 15</u>: $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, mit $\Omega \supset B(0,1)$, und sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in B(0,1)$. Dann gilt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \qquad (*)$$

wobei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$
$t \mapsto \gamma(t) = e^{it}$

<u>Beweis</u> Sei $z_0 = |z_0| e^{i\varphi}$ und γ_ε der folgende "Schlüssellochweg". Sei $\rho < 1 - |z_0|$ und

$$\partial\left(B(0,1) \setminus \left\{\overline{B(z_0,\rho)} \cup \{re^{i(\theta+\varphi)} \mid |\theta| < \varepsilon,\ r > 0\}\right\}\right)$$



$\tilde{\gamma}_\rho : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$
$t \mapsto \tilde{\gamma}(t) = \cancel{z_0 + \rho e^{it}}$
$z_0 + \rho e^{i(\varphi - t)}$

Da f in Ω holomorph ist ist $z \mapsto \frac{f(z)}{z - z_0}$ in $\Omega \setminus \{z_0\}$ holomorph und aus Satz 12 gilt

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 0 ,$$

da $\{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 0 < r < 1+\delta,\ \varphi - \frac{\varepsilon}{2} < \theta < \varphi + \frac{\varepsilon}{2}\}$ für jedes $\delta > 0$ ein Sterngebiet ist. Mit $\varepsilon \searrow 0$ heben sich die Beiträge der geraden Abschnitte auf, dann für alle $\rho < 1 - |z_0|$

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\tilde\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \;;$$

aber $$\int_{\tilde\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\tilde\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz + 2\pi i\, f(z_0)$$

bei der Bemerkung auf S. 27. Schließlich

$$\left| \int_{\tilde\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz \right| \leq 2\pi \cdot \sup\{|f(z)-f(z_0)| \;z \in \tilde\gamma_\rho\}$$
$$\to 0 \quad (\rho \to 0)$$

da f insbesondere stetig in Ω ist.

Summa summarum:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \lim_{\rho \searrow 0} \int_{\tilde\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$ □

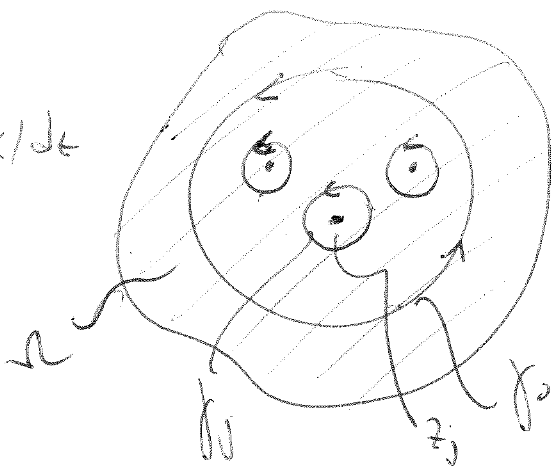
• Bemerkung: Aus dem Beweis folgt auch:

Sei $z_1, \dots, z_n \in B(0,1)$, $z_i \neq z_j$ $(i \neq j)$ und f holomorph in $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. Setz

$$\rho < \min\left\{ \min_j (1-|z_j|), \tfrac{1}{2}\min_{i\neq j} |z_i - z_j| \right\}$$

und γ_0 der Weg $|z| = 1$, γ_j die Wege $|z-z_j| = \rho$, Dann erhält man

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^n \int_{-\gamma_j} f(z)\,dz$$



- Bemerkungen: * Sei f holomorph in Ω. Für geschlossene Wege γ, sodass "$\gamma \cup \operatorname{int}\gamma \subset \Omega$" und die "nur einmal um ihr Innere kreisen (s. später Windungszahl) gelten auch:

  i) $\int_\gamma f(z)\,dz$

  ii) $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$

  für alle $z_0 \in \operatorname{int}\gamma$, falls γ die positive Orientierung hat.

* Die Cauchysche Integralformel (*), CIF, zeigt, dass eine holomorphe Funktion f im Inneren eines Kreises vollständig von den Werten von f auf dem Rand des Kreises bestimmt ist.
  $\rightsquigarrow$ siehe Dirichletproblem für harmonische Funktionen und u, v sind harmonisch, da f holomorph ist.

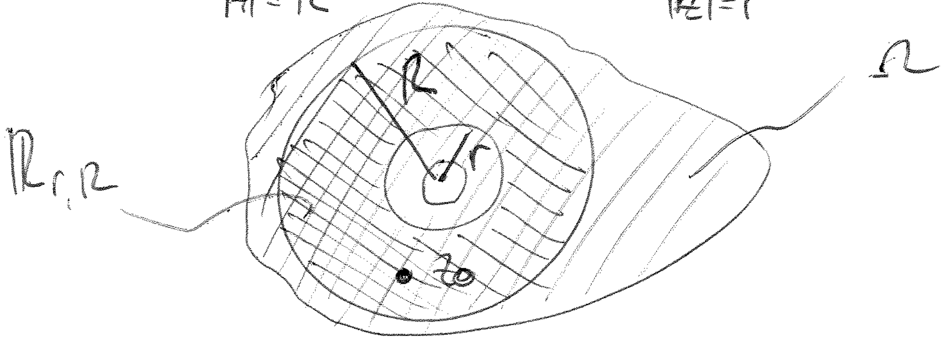
* Dieselbe Beweisstrategie liefert eine CIF für den Ring

  $\mathbb{R}_{r,R} := \{ z \in \mathbb{C} : r < |z| < R \}$

  und f analytisch in einer offenen Umgebung $\Omega \supset \overline{\mathbb{R}_{r,R}}$:

  Für $z_0 \in \mathbb{R}_{r,R}$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$



- Lemma: Sei $A, \Omega \subset \mathbb{C}$, mit Ω offen, und sei $h: A \times \Omega \to \mathbb{C}$, sodass:
  i) $\forall z \in \Omega$, $h(\cdot, z)$ ist stetig auf A.
  ii) $\forall \xi \in A$, $h(\xi, \cdot)$ ist holomorph in Ω
  iii) $\forall \xi \in A$, $\partial_2 h(\xi, \cdot)$ ist stetig in Ω, gleichmässig in $\xi \in A$.
  iv) $\forall z \in \Omega$, $\partial_2 h(\cdot, z)$ ist stetig auf A.

Dann sind die Funktionen

$$g: \Omega \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \int_\gamma h(\xi, z)\, d\xi \,; \qquad \tilde{g}: \Omega \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \int_\gamma \partial_2 h(\xi, z)\, d\xi$$

wohl definiert, und

g ist holomorph in Ω, mit $\tilde{g}(z) = g'(z)$.

Beweis: Dass $g, \tilde{g}$ wohl definiert sind, folgt aus (i, iv).
Sei $z \in \Omega$ und $r > 0$, sodass $B(z, r) \subset \Omega$. Sei $\zeta \in \mathbb{C}$: $0 < |\zeta| < r$. Da $h(\xi, z)$ eine zu $\partial_2 h(\xi, z)$ Stammfunktion ist, gilt.

$$\int_{[z, z+\zeta]} \partial_2 h(\xi, w)\, dw = h(\xi, z+\zeta) - h(\xi, z).$$

Weiter folgt:

$$(*) \quad \frac{g(z+\zeta) - g(z)}{\zeta} - \int_\gamma \partial_2 h(\xi, z)\, d\xi$$

$$= \int_\gamma \left\{ \frac{1}{\zeta} \int_{[z, z+\zeta]} \Big(\partial_2 h(\xi, w) - \overbrace{\partial_2 h(\xi, z)}^{\text{hängt nicht von } w \text{ ab.}} \Big)\, dw \right\} d\xi$$

mit (iii): $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta \in (0, r)$ sodass für $|\zeta| < \delta$

$$|\partial_2 h(\xi, w) - \partial_2 h(\xi, z)| < \varepsilon$$

für alle $\xi \in \mathrm{Bx}(\gamma)$ und $w \in [z, z+\zeta]$, und daher.

$$\left|\int_{[z,z+\xi]} \left(\partial_2 h(\xi,w) - \partial_2 h(\xi,z)\right) dw\right| < |\xi|\cdot\varepsilon$$

und $$\left|\frac{g(z+\xi)-g(z)}{\xi} - \int_\gamma \partial_2 h(\xi,z)\,d\xi\right| < \varepsilon L(\gamma)$$

$$\Rightarrow \lim_{\xi\to 0} \frac{g(z+\xi)-g(z)}{\xi} = \int_\gamma \partial_2 h(\xi,z)\,d\xi$$ $\square$.

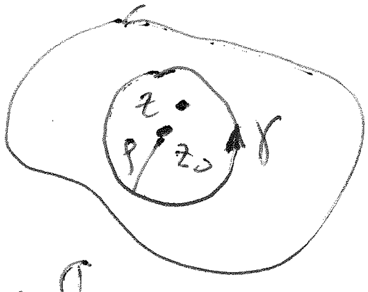
• <u>Satz 16</u>. Sei $\Omega\subset\mathbb{C}$ ein Gebiet und $f:\Omega\to\mathbb{C}$ eine in Ω holomorphe Funktion. Dann ist f unendlich oft <u>differenzierbar</u>. Für alle $z_0\in\Omega$ und $\rho>0$, sodass $\overline{B(z_0,\rho)}\subset\Omega$ gilt weiter:

$$f^{(j)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{j+1}}\,d\xi$$

für alle $z\in B(z_0,\rho)$ und $j\in\mathbb{N}$.

<u>Beweis</u>: Mit Satz 15 gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)}\,d\xi$$



Sei $h: \partial B(z_0,\rho)\times\left(\Omega\setminus\partial B(z_0,\rho)\right)\longrightarrow\mathbb{C}$

$$(\xi,z)\longmapsto f(\xi)/(\xi-z)2\pi i$$

Da $\Omega\setminus\partial B(z_0,\rho)$ offen ist und $\xi-z\neq 0$ im Definitionsbereich von h, gelten die Annahmen i, ii. Weiter ist

$$\partial_2 h(\xi,z) = \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\frac{1}{2\pi i},$$

sodass iii, iv auch gelten. Also, mit dem Lemma: f (ist holomorph) und $$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\,d\xi$$

Mit $h_1(\xi, z) := \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}$ erhält man also

$$f'(z) = \int_\gamma h_1(\xi, z)\, d\xi$$

Da h_1 wieder alle Voraussetzungen von Lemma erfüllt ist f' holomorph und

$$f''(z) = \int_\gamma \partial_z h_1(\xi, z)\, d\xi = \frac{2}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3}\, d\xi .$$

für alle $z \in B(z_0, \rho)$. Der Satz folgt per Induktion $\square$

- Korollar: Ist f holomorph in Ω, dann ist f' auch holomorph
- Als weiteres Korollar: der Satz von Morera:

Satz 17: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Sei f eine stetige Funktion in Ω, sodass $\forall z_0 \in \Omega$, $\exists \delta > 0$ sodass

$\int_T f(z)\, dz$ für alle Dreiecke T in $B(z_0, \delta)$.

Dann ist f holomorph in Ω.

Beweis: Im Beweis von Satz 12 wird die Holomorphizität von f nur dann benutzt, um $\int_T f(z)\,dz = 0$ für Dreiecke schließen zu können. Nimmt man das wie hier an, folgt ähnlich dass f eine Stammfunktion in $B(z_0, \delta)$ besitzt: $F' = f$. Mit dem obigen Korollar erhält man also, dass f holomorph in $B(z_0, \delta)$ ist.
Da z_0 arbiträr in Ω ist, folgt dass f in Ω holom. ist $\square$

- Bem: Satz 17 ist eine gewisse Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes.

- <u>Satz 18</u> (Liouville) Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Falls f beschränkt ist, dann ist f eine konstante Funktion.

<u>Beweis</u>: Sei $z \in \mathbb{C}$. Aus Satz 16 folgt, dass

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

für alle $r > 0$, und daher

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{M}{r^2} = \frac{M}{r}$$

wobei $M = \sup \{ |f(z)| : z \in \mathbb{C} \} < \infty$.
Da die Schranke für alle $r > 0$ gilt, folgt $f'(z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$, sodass f eine konstante Funktion ist. $\square$

- Jetzt: Fundamentalsatz der Algebra:

<u>Satz 19</u>: Jedes nichtkonstante komplexe Polynom besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

<u>Beweis</u>: Da P nichtkonstant ist, lässt es sich

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$$

mit $a_N \neq 0$, $N > 0$, schreiben. Wir nehmen an, P hätte keine Nullstelle. Dann ist $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion.
Da $|P(z)|\,|z|^{-N} \to a_N$ $(|z| \to \infty)$ konvergiert, gilt $|f(z)|\,|z|^N \to a_N^{-1}$ $(|z| \to \infty)$, also $|f(z)| \to 0$.
D.h. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists R > 0$, sodass

$$|z| \geq R \Rightarrow |f(z)| < \varepsilon$$

dazu ist f stetig in jeder $\overline{B(0,R)}$, also beschränkt in $\mathbb{C}$.
Man schliesst dann mit Hilfe von Liouvilleschen Satz. $\square$

- **Korollar**: Zu jedem Polynom vom Grade $N > 0$ existieren $z_1, \dots, z_N$ in $\mathbb{C}$, sodass

$$P(z) = a_N (z - z_1) \cdots (z - z_N)$$

Bem: Die z_j sind nicht unbedingt unterschieden.

Beweis: Wenn $N > 0$ existiert eine Nullstelle z_1. Dann

$$P(z) = \sum_{j=0}^{N} b_j (z - z_1)^n$$

Da aber $P(z_1) = 0$, muss $b_0 = 0$, und daher

$$P(z) = (z - z_1) Q(z)$$

mit Q ein Polynom vom Grade $N-1$.

Die Behauptung folgt durch Induktion. $\square$

6) Potenzreihen und Laurentreihen

- Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann heißt
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$
eine <u>Potenzreihe</u> zum Entwicklungspunkt z_0.

- Sei $L := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ und
$$\rho := \begin{cases} 0 & \text{falls } L=\infty \\ L^{-1} & \text{" } L\in(0,\infty) \\ \infty & \text{" } L=0 \end{cases}$$

<u>Satz 20</u>: Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ist für alle $z\in\mathbb{C}: |z-z_0|<\rho$ absolut konvergent und divergent für alle $z\in\mathbb{C}: |z-z_0|>\rho$.

<u>Beweis</u>: • Fall $L\in(0,\infty)$:
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||z-z_0|^n} = L|z-z_0|$$
sodass die Reihe nach dem Wurzelkriterium für alle $z: |z-z_0|<1/L$ konvergiert absolut, und für alle $z: |z-z_0|>1/L$ divergiert.

- Im Fall $L=0$ ergibt sich $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||z-z_0|^n}=0$ für alle $z\in\mathbb{C}$ und die Reihe konvergiert absolut $\forall z\in\mathbb{C}$.
- Im Fall $L=\infty$. Sei $z\in\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ und $r:=\frac{2}{|z-z_0|}>0$. Dann ist $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\geq r$ und insbesondere

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||z-z_0|^n} \geq r|z-z_0| = 2 > 1$$

sodass die Reihe für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ divergiert □

- Bemerkung: * ρ heisst der Konvergenzradius.
  * In allen Fällen konvergiert die Reihe für $z = z_0$ und die Summe der Reihe ist a_0.
  * Die Reihen

$$\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n \; ; \; \sum_{n\geq 1} n a_n (z-z_0)^{n-1} \; ; \; \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1}$$

besitzen alle denselben Konvergenzradius, da

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^0 = 1 \; , \text{ und}$$

$$\lim \left(\frac{1}{n+1}\right)^{1/n} = \lim e^{-\frac{1}{n}\ln(n+1)} = e^0 = 1$$

- Mehr über die Konvergenz von Folgen von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $f_n : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist punktweise konvergent, falls $\exists f : \Omega \to \mathbb{C}$:

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(z) - f(z)| = 0 \qquad \forall z \in \Omega.$$

* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmässig konvergent, falls $\exists f : \Omega \to \mathbb{C}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sup \{ |f_n(z) - f(z)| \;\; z \in \Omega \} = 0$$

* Eine Reihe von Funktionen $\{\sum_{n=0}^{N} f_n\}_{N\in\mathbb{N}}$ heisst normal konvergent, falls es zu jedem $z_0 \in \Omega$ eine Umgebung U_{z_0} gibt, sodass $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty$, wobei

$$\alpha_n := \sup \{ |f_n(z)| : z \in U_{z_0} \cap \Omega \}$$

Bem: normal $\Rightarrow$ lokal gleichmässig, absolut.

- Sei $\sum_n a_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Sei $r \in [0,\rho)$ und $R \in (r,\rho)$. Da $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho} < \frac{1}{R}$, $\exists$ $n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{R}$ $\forall\, n \geq n_0$, und weiter $|a_n| |(z-z_0)|^n < \left(r/R\right)^n$ für alle $z \in B(z_0, r)$, $n \geq n_0$. Da $r < R$ folgt

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \sup \{ |a_n (z-z_0)^n| : z \in B(z_0, r)\} \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n < \infty .$$

sodass eine Potenzreihe in $B(z_0,r)$ auch normal konvergiert, für alle $r < \rho$ (und eigentlich auch in $B(z_0,\rho)$).

- <u>Bemerkung</u>: Falls $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig ist $\forall n \in \mathbb{N}$ und falls $\sum_{\mathbb{N}} f_n$ normal konvergiert (nach F) dann ist F auch stetig (wegen der lokal gleichmässigen Konvergenz) und

$$\int_\gamma F(t)\,dt = \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f(z)\,dt$$

für alle geschlossene C^1-Wege $\gamma \subset \Omega$. ~~s. Aufgabe~~. (dominierte Konvergenz)

- <u>Satz 21</u>: Sei $\sum a_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist die Funktion

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

holomorph in $B(z_0, \rho)$. Dazu gilt:

i) $f^{(k)}(z_0) = k! \cdot a_k \qquad (k \in \mathbb{N})$

ii) $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$, $z \in B(z_0,\rho)$

iii) $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n (z-z_0)^{n+1}$, $z \in B(z_0,\rho)$

ist ein Stammfunktion von f auf $B(z_0,\rho)$.

- Beweis: Sei $f_N(z) := \sum_{n=0}^{N} a_n (z-z_0)^n$. f_N ist ein Polynom vom Grade N, also insbesondere ist f_N in $\mathbb{C}$ holomorph. Mit der Bemerkung folgt, dass f stetig in $B(z_0, \rho)$ ist.

  $\forall r \in (0, \rho)$, sei γ_r der positiv orientierter Weg entlang $\partial B(z_0, r)$. Mit Satz 15 gilt $\forall z \in B(z_0, r)$:
$$f_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f_N(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$
und weiter
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi \qquad (*)$$
da $f_N \to f$ gleichmässig in $\overline{B(z_0, r)}$. Wie im Beweis vom Satz 16 folgt, dass die rechte Seite von $(*)$ eine in $B(z_0, \rho) \setminus \partial B(z_0, r)$ holomorphe Funktion, daher ist f insbesondere holomorph in $B(z_0, r)$, und
$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \, d\xi \qquad (**)$$
$\forall z \in B(z_0, r)$ (wieder bei der Diskussion auf S. 39)

Nun gilt auch, dass $f_N'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f_N(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$ und dass
$$\int_{\gamma_r} \frac{f_N(\xi)}{(\xi - z)^2} \, d\xi \longrightarrow \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \, d\xi \qquad (***)$$
bei der gleichmässigen Konvergenz $f_N \to f$ in $\overline{B(z_0, r)}$.

Aus den Bemerkungen folgt jetzt: $\forall r \in (0, R)$, $\forall z \in B(z_0, r)$:

$$f'(z) \overset{(**)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

$$\overset{(***)}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f_N(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi$$

$$= \lim_{N\to\infty} f_N'(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

Daher ist f holomorph in $B(z_0, \rho)$, mit

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1},$$

da die Reihe auch Konvergenzradius ρ hat. Insbesondere gilt $f'(z_0) = a_1$.

Nach Induktion ergibt sich weiter

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-z_0)^{n-k}$$

mit $f^{(k)}(z_0) = k!\, a_k$.

(der Konvergenzradius bleibt konstant, da

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)^{1/n} \le \lim_{n\to\infty} n^{k/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{k}{n}\ln n} = 1 \quad)$$

Jetzt folgt auch, dass g in $B(z_0,\rho)$ holomorph ist, und dass

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+1} a_n (z-z_0)^n = f(z),$$

nämlich: g ist eine Stammfunktion von f auf $B(z_0, \rho)$. $\square$

Bemerkung: Wir haben also bewiesen, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n,$$

d.h. f ist dargestellt als eine konvergente Taylorreihe

- Def: # Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und $f: \Omega \to \mathbb{C}$. Dann heisst f analytisch, wenn es zu jedem $z_0 \in \Omega$ ein $r_0 > 0$ mit $B(z_0, r_0) \subseteq \Omega$ und eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ gibt, die $\forall z \in B(z_0, r_0)$ konvergiert und sodass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad \forall z \in B(z_0, r_0).$$

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heisst ganz, wenn es eine auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe gibt, sodass $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

- Beispiele: i) $z_0 \in \mathbb{C}$, $f_{z_0}: \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$$

ist analytisch; f_{z_0} kann aber nicht zu einer ganzen Funktion erweitert werden.

ii) Sei $\sum_n c_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist

$$f: B(z_0, \rho) \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

analytisch.

iii) Wegen $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{n!} = \infty$ ist die Exponentialfunktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

eine ganze Funktion.

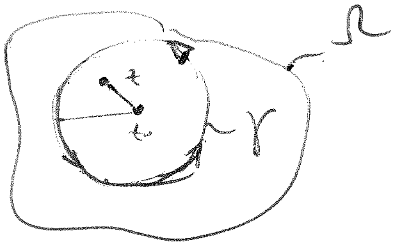
- Satz 22: Sei Ω ein Gebiet, und $f: \Omega \to \mathbb{C}$.
  i) Wenn f analytisch ist, dann ist f in Ω holomorph.
  ii) Wenn f holomorph in Ω ist, dann ist f analytisch, und der Konvergenzradius der Potenzreihe zum

Entwicklungspunkt z_0 ist $\geq \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$.

Beweis: i) ist Satz U

ii) Sei $d := \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. $\forall\, 0<\rho<d$ gilt nach Satz 17:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \qquad z \in B(z_0, \rho)$$



Nun

$$(\xi - z)^{-1} = (\xi - z_0)^{-1}\cdot\left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^{-1}$$

$$= (\xi - z_0)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\xi - z_0)^{n+1}}(z - z_0)^n$$

(Bem: $\left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| < 1$)

Multipliziert man mit $f(\xi)$ und vertauscht $\int_\gamma$ mit $\sum_n$, so erhält man, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \forall z \in B(z_0, \rho)$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - z_0| = \rho}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

$\square$

- Für eine beliebige Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heisst $z \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von Ω, wenn $\forall r > 0$, $\Omega \cap (B(z, r)\setminus\{z\}) \neq \emptyset$.

Satz 23. Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, f und g holomorph in Ω. Dann sind äquivalent:

i) $f = g$

ii) Die Menge $M := \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ hat einen Häufungspunkt, der in Ω liegt.

iii) $\exists z_0 \in \Omega : \quad f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Beweis</u>: $i \Rightarrow ii$: trivial, da jeder $z \in \Omega$ ein Häufungspunkt von M $(= \Omega) \cap \Omega$ ist.

$ii \Rightarrow iii$: Die Funktion
$$h : \Omega \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto f(z) - g(z)$$
ist holomorph und $M = \{z \in \Omega : h(z) = 0\}$ hat einen Häufungspunkt $z_0 \in \Omega$.

Wir nehmen an, es existiert ein $n \in \mathbb{N}$: $h^{(n)}(z_0) \neq 0$

Sei $n_0 := \min\{n \in \mathbb{N} : h^{(n)}(z_0) \neq 0\}$. Da h analytisch ist:

$$h(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} h^{(l)}(z_0)(z-z_0)^l = \sum_{l=n_0}^{\infty} (\ldots)$$

$$= (z-z_0)^{n_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+n_0)!} h^{(l+n_0)}(z_0)(z-z_0)^l$$

$\forall z \in B(z_0, r)$ für ein $r > 0$.

Schreibt man $h(z) = (z-z_0)^{n_0} h_{n_0}(z)$, so gilt

$$\underbrace{h_{n_0}(z_0) = \frac{1}{n_0!} h^{(n_0)}(z_0)}_{\text{Term } (l=0) \text{ der Reihe}} \neq 0,$$

und wegen Stetigkeit $\exists \delta > 0 : \quad h_{n_0}(z) \neq 0 \quad \forall z \in B(z_0, \delta)$

Insbesondere ist also $h(z) \neq 0 \quad \forall z \in B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$, und z_0 ist kein Häufungspunkt von M, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $h^{(n)}(z_0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$iii \Rightarrow i$: Sei

$$S_k := \{\xi \in \Omega : h^{(k)}(\xi) = 0\} = (h^{(k)})^{-1}(\{0\})$$

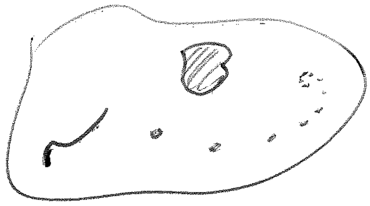
Da $h^{(k)}$ stetig ist und $\{0\}$ abgeschlossen ist S_k (in der Relativtopologie auf Ω) abgeschlossen.

Weiter ist $S := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} S_k$ als Durchschnitt abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen.
Sei $z_0 \in S$, also $h^{(k)}(z_0) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. So konvergiert die Potenzreihe $\sum_n \frac{1}{n!} h^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n$ in einer Kreisscheibe $B(z_0,r)$, und

$$h|_{B(z_0,r)} = 0,$$

d.h. $B(z_0,r) \subseteq S$ und S ist daher auch offen.
Da $z_0 \in S$ nach Voraussetzung ist $S \neq \emptyset$, sodass $S = \Omega$, da Ω auch zusammenhängend ist. Also gilt $f = g$ auf Ω $\square$

- Der Gesamtverlauf einer in Ω analytischen Funktion f (Ω ein Gebiet) ist also schon von den Funktionswerten in einer "kleinen" Teilmenge $M \subset \Omega$ vollständig bestimmt, etwa



Als Korollar erhält man ein Prinzip <u>eindeutiger Fortsetzbarkeit</u>:
Sei $M \subset \Omega$ eine Menge mit mindestens einem Häufungspunkt (z.B eine beliebig kleine Kreisscheibe) und $f : M \to \mathbb{C}$.
Wenn eine analytische Funktion $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{C}$ existiert, welche f fortsetzt, so ist diese <u>eindeutig</u> bestimmt.
z.B. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, und f, g zwei in Ω analytischen Funktionen, sodass

$$f|_{\Omega\cap\mathbb{R}} = g|_{\Omega\cap\mathbb{R}}$$

Dann gilt $f(z) = g(z)$ $\forall z \in \Omega$.

- Eine zum Liouvilleschen Satz ähnliche Aussage ist das folgende Maximumprinzip:

Satz 24: Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, sodass $|f|$ ein lokales Maximum hat. Dann ist f konstant auf Ω.

Dafür spielt der Satz über Gebietstreue eine wichtige Rolle: Eine Funktion $f: \Omega \to \mathbb{C}$ heisst offen, falls $f(U) \subseteq \mathbb{C}$ offen ist für alle offenen Mengen $\emptyset \neq U \subseteq \Omega$.
(bemerke den Unterschied mit der Stetigkeit von f, nämlich $f^{-1}(U)$ ist offen für jede offene $U \subseteq \mathbb{C}$!)

Satz 25: Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist f eine offene Abbildung.

- Zuerst beweisen wir: $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \Omega$ und $\rho > 0$ sodass $\overline{B(z_0, \rho)} \subseteq \Omega$. Gilt

$$\min\{|f(z)| : |z - z_0| = \rho\} > |f(z_0)| \qquad (*)$$

so hat f eine Nullstelle in $B(z_0, \rho)$.

Beweis: Hat f keine Nullstelle in $B(z_0, \rho)$, dann hat f mit der Annahme auch keine Nullstelle in $\overline{B(z_0, \rho)}$. Da die kompakte Menge $\overline{B(z_0, \rho)} \subseteq \Omega$, $\exists\, r > \rho$, sodass $\overline{B(z_0, r)} \subseteq \Omega$. Da f keine Nullstelle in $\overline{B(z_0, \rho)}$ hat ist $f \neq 0$ in Ω also aus Satz 23 hat die Menge $\{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ keinen Häufungspunkt. Hätte die Teilmenge $\{z \in \Omega : f(z) = 0\} \cap \overline{B(z_0, r)}$ der kompakten

Menge $\overline{B(z_0,r)}$ unendlich viele Punkte, dann hätte sie auch einen Häufungspunkt, also ist

$$\left| \{z \in \Omega : f(z) = 0\} \cap \overline{B(z_0,r)} \right| < \infty .$$

Daher $\exists\, \tilde{r} \in (\rho, r]$, sodass $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in B(z_0, \tilde{r})$.

Sei nun $g(z) := 1/f(z)$. g ist holomorph in $B(z_0,\tilde{r})$ und mit der Cauchyschen Integralformel:

$$\frac{1}{|f(z_0)|} = |g(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\left| \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{g(z)}{(z-z_0)}\, dz \right| \leq \underbrace{\max\{|g(z)| : |z-z_0| = \rho\}}$$

$$= 1/\min\{|f(z)| : |z-z_0| = \rho\}.$$

was ein Widerspruch zur Voraussetzung $(*)$ ist $\square$

- <u>Bem</u>: Die ganze Arbeit im obigen <u>Beweis besteht</u> also darin, eine offene Menge $U \supset \overline{B(z_0,\rho)}$ zu finden, auf der f immer noch keine Nullstelle hat, um die C.I.F. anwenden zu können.

- <u>Beweis vom Satz 25</u>: Sei $U \subseteq \Omega$ offen und $w \in f(U)$. Sei $z_0 \in U$, $w = f(z_0)$.

Sei $r > 0$: $\overline{B(z_0,r)} \subset B(z_0, 2r) \subset U$. Da f nicht konstant ist, enthält die Menge $\{z \in \overline{B(z_0,r)} : f(z) = w\}$ keinen <u>Häufungspunkt</u> (nach Satz 23), sodass $\exists\, \rho \in (0,r)$: $f(z) \neq w \quad \forall z \in \overline{B(z_0,\rho)} \setminus \{z_0\}$. Da $|f(z) - w|$ eine stetige Funktion auf dem Kompaktum $|z - z_0| = \rho$ ist, definieren wir

$$0 < 3\varepsilon := \min\{|f(z) - w| : |z - z_0| = \rho\}.$$

Seien nun v: $|w - v| < \varepsilon$ und z: $|z - z_0| = \rho$. Dann

$$|f(z)-v| \geq \big| |f(z)-w| - |w-v| \big| \geq 3\varepsilon - \varepsilon = 2\varepsilon$$

und weiter

$$\min\{|f(z)-v| : |z-z_0|=\rho\} \geq 2\varepsilon > \varepsilon > |\underbrace{w}_{=f(z_0)}-v|$$

Nach dem Lemma hat die holomorphe Funktion $f-v$ eine Nullstelle in $B(z_0,\rho)$, d.h. $\exists z \in B(z_0,\rho) : f(z)=v$ oder $v \in f(B(z_0,\rho)) \subset f(U)$ für alle $v : |w-v|<\varepsilon$, also ist $B(w,\varepsilon) \subset f(U)$ und damit ist $f(U)$ offen. $\square$

- Beweis von Satz 24: Sei $z_0 \subset \Omega$ ein lokales Maximum von $|f|$. ~~Da $|f|$ stetig ist~~ $\exists\, U \ni z_0$ offen und $U \subset \Omega$: $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ $\forall z \in U$. Also ist

$$f(U) \subseteq \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq |f(z_0)|\}$$

keine offene Umgebung von $f(z_0)$ und mit Satz 25 ist aber f auf U konstant und weiter auf ganz Ω (wieder mit Satz 23) $\square$

- Bemerkung: Ähnlich beweist man ein Minimumsprinzip: Falls $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph im Gebiet Ω ist und $|f|$ ein lokales Minimum in $z_0 \in \Omega$ hat, dann gilt $f(z_0)=0$ oder f ist konstant in Ω

- Korollar: Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Sei $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ holomorph in Ω und stetig in $\overline{\Omega}$. Dann:
  i) $|f|$ nimmt auf $\partial\Omega$ ein Maximum an
  ii) f hat in Ω eine Nullstelle oder $|f|$ nimmt auf $\partial\Omega$ ein Minimum an.

Beweis: Da $\overline{\Omega}$ kompakt und $|f|$ stetig sind, existieren

$m := \min\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\}$;

$M := \max\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\}$.

i) $\exists\, z_0 \in \Omega : |f(z_0)| = M$, dann ist f konstant in Ω und bei Stetigkeit auf $\overline{\Omega}$. Damit wird das Maximum auch auf dem Rand angenommen.

ii) Hat f in $\overline{\Omega}$ keine Nullstelle, dann ist $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$, $g(z) := 1/f(z)$ holomorph in Ω und stetig auf $\overline{\Omega}$. Nach i) nimmt $|g|$ ein Max auf $\partial\Omega$ an, und deswegen $|f|$ ein Minimum. Falls f nur in Ω keine Nullstelle hat, hat f möglicherweise eine Nullstelle auf $\partial\Omega$, also nimmt $|f|$ auch sein Min auf $\partial\Omega$ an. $\square$

- Im Satz 22: Die Existenz einer konvergenten Taylorentwicklung einer in Ω holomorphen Funktion folgte aus der Cauchyschen Integralformel für die Kreisscheibe. Benutzt man hingegen die C.I.F. für den Ring $R_{r,R}$ erhält man eine neue Reihendarstellung von f: die Laurentreihe.
- Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $z, z_0 \in \mathbb{C}$. Dann heisst

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$$

eine Laurentreihe zum Entwicklungspunkt z_0.

Das ist als Summe zweier Reihen zu verstehen:

$$S_1 : \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n \quad ; \quad S_2 : \sum_{n\geq 1} a_{-n} (z-z_0)^{-n}$$

wobei S_1 eine Potenzreihe ist, mit Konvergenzradius ρ_1. S_1 definiert also eine holomorphe Funktion f_1 in $B(z_0, \rho_1)$. Sei nun $\xi := (z-z_0)^{-1}$ und $b_n := a_{-n}$ und die Potenzreihe $\sum_{n\geq 1} b_n \xi^n$ mit Konvergenzradius ρ_2. Dann ist

$$g(\xi) := \sum_{n\geq 1} b_n \xi^n$$

eine holomorphe Funktion in $B(0, \rho_2)$. Sei

$$f_2(z) := g\left(\frac{1}{z-z_0}\right) \quad , \quad |z-z_0| > 1/\rho_2 \quad ,$$

nämlich $f_2 = g \circ h$ wobei $h(z) = (z-z_0)^{-1}$ ist holomorph in $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| > 1/\rho_2\} =: A$. Da $h(A) = B(0,\rho_2) \setminus \{0\}$ und g ist holomorph in $B(0,\rho_2)$, ist f_2 holomorph in A. Weiter gilt

$$f_2'(z) = -\frac{1}{(z-z_0)^2}\, g'\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$$
$$= -(z-z_0)^{-2} \sum_{n\geq 1} n b_n (z-z_0)^{-n+1}$$
$$= \sum_{n\geq 1} (-n)\, a_{-n} (z-z_0)^{-(n+1)} = \sum_{m\leq -1} m a_m (z-z_0)^{m-1}$$

Jetzt: Wir nehmen an: $\rho_1 > 1/\rho_2$. Sei

$$R(z_0; r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}.$$

Wir haben gerade bewiesen:

$$f : R(z_0; 1/\rho_2, \rho_1) \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$$

ist holomorph, mit

$$f'(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n a_n (z-z_0)^{n-1} \qquad z \in R(z_0; 1/\rho_2, \rho_1)$$

Weiter gilt: Sei $\frac{1}{\rho_2} < r < \rho_1$:

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz \overset{\text{wegen der normalen Konvergenz}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \int_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^n dz = 2\pi i\, a_{-1}.$$

und

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \int_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^{n-k-1} dz = 2\pi i\, a_k.$$

→ Die Koeffizienten $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sind also von der Funktion $f: R(z_0; 1/\rho_2, \rho_1) \to \mathbb{C}$ <u>eindeutig bestimmt</u>

- Der Analog vom Satz 22 ist jetzt der Satz von Laurent:

Satz 26. Sei $0 \le r < R$ und $f : R(z_0; r, R) \to \mathbb{C}$ holomorph in $R(z_0; r, R)$. Dann existieren $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $a_n \in \mathbb{C}$, sodass

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$$

und die Reihe konvergiert normal in $R(z_0; \tilde r, \tilde R)$ für alle $r < \tilde r < \tilde R < R$.
Weiter gilt:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \qquad (r<\rho<R)$$

Beweis: Aus der C.I.F für den Ring

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=\tilde r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=\tilde R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \qquad (*)$$

$(z \in R(z_0; \tilde r, \tilde R))$ gilt:

* Im ersten Integral

$$(\xi - z)^{-1} = -(z-z_0)^{-1} \left(1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^{-1}$$

$$= -(z-z_0)^{-1} \sum_{n\ge 0} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n$$

da $|\xi - z_0| < |z - z_0|$.

Die Reihe ist normal konvergent, sodass

$$-\int_{|\xi-z_0|=\tilde r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi = +\sum_{n\ge 1} (z-z_0)^{-n} \int_{|\xi-z_0|=\tilde r} f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1} d\xi$$

$$= 2\pi i \sum_{m\le -1} a_m (z-z_0)^m$$

* Im zweiten Integral bemerkt man ähnlich:

$$(\zeta-z)^{-1} = (\zeta-z_0)^{-1}\left(1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{-1}$$
$$= (\zeta-z_0)^{-1}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$$

da $|z-z_0| < |\zeta-z_0|$, sodass

$$\int_{|\zeta-z_0|=\tilde{R}} f(\zeta)/(\zeta-z)\,d\zeta = \sum_{n\geq 0}(z-z_0)^n\int_{|\zeta-z_0|=\tilde{R}} f(\zeta)/(\zeta-z_0)^{n+1}\,d\zeta$$
$$= 2\pi i\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$$

Insgesamt haben wir also

$$f(z) = \sum_{n\leq -1} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$$ bewiesen. □

• Korollar (Laurentzerlegung): Sei $0\leq r<R$ und $f: \mathbb{R}(z_0; r, R)\to\mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann existieren f_+, f_-, sodass

$$f(z) = f_+(z) + f_-(z),$$

wobei f_+ eine in $\{z\in\mathbb{C}: |z-z_0|>r\}$ analytische Funktion ist, und f_- in $\{z\in\mathbb{C}: |z-z_0|<R\}$ analytisch ist. Falls $\lim_{|z|\to\infty}|f_+(z)|=0$ sind f_+, f_- eindeutig.

Beweis: Sei $f_+(z) := \sum_{n\leq -1} a_n(z-z_0)^n$, $f_-(z) := \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ wobei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ im Satz 26 gegeben sind. Dann ist $f = f_+ + f_-$ in $\mathbb{R}(z_0; r, R)$, und f_+ ist analytisch in $\mathbb{C}\setminus\overline{B(z_0,r)}$ (s. Diskussion auf Seite 57), f_- ist analytisch in $B(z_0,R)$. Da alle Potenzen von $(z-z_0)$ in f_+ negativ sind, gilt $\lim_{|z|\to\infty}|f_+(z)| = 0$.

* Sei $\tilde{f}_+, \tilde{f}_-$ zwei Funktionen mit denselben Eigenschaften, und sei

$$h := f_+ - \tilde{f}_+ \equiv -f_- + \tilde{f}_-$$

in $R(z_0; r, R)$ definiert. h ist also analytisch in $\mathbb{C} \setminus \overline{B(z_0, r)}$ und auch in $B(z_0, R)$, sodass sie sich zu einer ganzen Funktion erweitern lässt.
Da aber $\lim_{|z| \to \infty} |h(z)| = 0$ ist sie beschränkt, und deswegen konstant, $= 0$ $\square$.

7) Isolierte Singularitäten und Residuensatz

- Eine Funktion f hat eine <u>isolierte Singularität</u> in $z_0 \in \mathbb{C}$, falls es $\delta > 0$ gibt, sodass f in $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ holomorph ist.
- Sei f holomorph in $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

für alle $0 < |z - z_0| < \delta$. Sei

$$N(f) := \min \{ n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0 \}$$

wobei $N(f) := -\infty$, falls es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt, mit $a_{-n} \neq 0$. Dann heisst z_0

i) ein <u>hebbare</u> Singularität, falls $N(f) \geq 0$

ii) ein <u>Pol</u> der Ordnung $k \in \mathbb{N}$, falls $N(f) = -k$.

iii) eine <u>wesentliche</u> Singularität, falls $N(f) = -\infty$.

- Lemma: Sei f holomorph in $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ und $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ ihre Laurentreihe zu z_0. Sei

$$M_\rho := \sup \{ |f(z)| : |z - z_0| = \rho \}$$

für alle $0 < \rho < \delta$. Dann gilt

$$|a_n| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: $|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \varrho \frac{M_\varrho}{\varrho^{n+1}} = \frac{M_\varrho}{\varrho^n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ $\square$

- Satz 27 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)

Sei f in $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ holomorph. z_0 ist eine hebbare Singularität, genau dann falls es $\tilde{\delta} < \delta$ gibt, sodass f in $B(z_0, \tilde{\delta}) \setminus \{z_0\}$ beschränkt ist.

In diesem Fall existiert $a_0 := \lim_{z \to z_0} f(z)$ und

$$\tilde{f} : B(z_0, \delta) \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \begin{cases} f(z) & z \neq z_0 \\ a_0 & z = z_0 \end{cases}$$

ist eine analytische Erweiterung von f auf $B(z_0, \delta)$.

Beweis: * Wenn z_0 eine hebbare Singularität ist, gilt

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \qquad z \in B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\},$$

sodass $\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0$ und f ist beschränkt

in $B(z_0, \tilde{\delta}) \setminus \{z_0\} \quad \forall\, 0 < \tilde{\delta} < \delta$.

* Umgekehrt: Sei f beschränkt auf $B(z_0, \tilde{\delta}) \setminus \{z_0\}$ und sei $M := \sup \{ |f(z)| : 0 < |z - z_0| < \tilde{\delta} \}$.

Sei $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ die Laurentreihe von f zum Punkt z_0.

Dann gilt mit dem Lemma, dass $|a_n| \leq \frac{M}{\varepsilon^n}$ für alle $0 < \varepsilon < \tilde{\delta}$, und alle $n \in \mathbb{Z}$. Das Limes $\varepsilon \downarrow 0$ bei festem $n < 0$ zeigt, dass $|a_{-n}| = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $(n \neq 0)$, also ist $N(f) \geq 0$ $\square$

- Weiter charakterisieren wir die Pole und die wesentlichen Singularitäten:

- <u>Satz 28</u> : Sei f eine in $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ holomorphe Funktion.

  i) z_0 ist ein Pol, g.d.f. $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.

  ii) z_0 ist eine wesentliche Singularität, g.d.f. $\lim_{z \to z_0} |f(z)|$ nicht existiert; in diesem Fall gilt:

  $$\forall \varepsilon > 0, \quad 0 < \varepsilon < \delta, \quad \overline{f(B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\})} = \mathbb{C}$$

- <u>Bem</u>: (ii) heisst auch der Satz von Casorati-Weierstraß. Der Wertevorrat von f eingeschränkt auf eine beliebig kleine Kreisscheibe ist dicht in $\mathbb{C}$.
  Holomorphe Funktionen verhalten sich also in der Nähe von wesentlichen Singularitäten sehr "chaotisch".

Eine Verschärfung davon ist der große Satz von Picard:
Ist z_0 eine wesentliche Singularität von f in $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$, dann ist der Wertevorrat für $f\restriction_{B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}}$ ganz $\mathbb{C}$ für alle $0 < \varepsilon < \delta$, bis auf möglicherweise eine Ausnahme; Dazu hat die Gleichung $f(z) = c$ unendlich viele Lösungen in $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ für alle $c \in \mathbb{C}$ (bis auf eine Ausnahme. Zum Beispiel

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \cdots \qquad z \neq 0$$

ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $z_0 = 0$ ist eine wesentliche Singularität, aber $\exp\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ hat keine Lösung.

- <u>Beweis</u>: (i) $\Rightarrow$ Sei z_0 ein Pol der Ordnung $k \geq 1$; Das bedeutet

$$f(z) = \sum_{n=1}^{k} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + f_-(z) \quad , \; b_k \neq 0$$

Daher: $\lim_{z\to z_0} |(z-z_0)^k f(z)| = |b_k| > 0$,

was $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$ impliziert.

* Umgekehrt, sei $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$. $\exists\, 0<\varepsilon<\delta$:

$|f(z)| > 1 \quad \forall z\in B(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\}$. Wir definieren

$g(z) := 1/f(z)$ in $B(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\}$, eine beschränkte, holomorphe Funktion, mit $g(z)\neq 0$ aber für die gilt:

$$\lim_{z\to z_0} |g(z)| = 0$$

Mit dem Hebbarkeitssatz folgt, dass $N(g) \geqslant 1$, und

$$g(z) = \sum_{n\geq N(g)} \alpha_n (z-z_0)^n \qquad \forall z\in B(z_0,\varepsilon),$$

$\alpha_{N(g)} \neq 0$.

Definiert man $h: B(z_0,\varepsilon)\to\mathbb{C}$: $g(z) = (z-z_0)^{N(g)} h(z)$, ist h holomorph mit $h(z_0) = \alpha_{N(g)}$ und $h(z)\neq 0$ für alle $z\in B(z_0,\varepsilon)$. Es folgt, dass $1/h(z)$ auch holomorph in $B(z_0,\varepsilon)$ ist, und $\exists\, \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sodass

$$\frac{1}{h(z)} = \sum_{n\geq 0} \beta_n (z-z_0)^n \qquad \forall z\in B(z_0,\varepsilon),$$

mit $\beta_0 = \frac{1}{h(z_0)} = \alpha_{N(g)}^{-1} \neq 0$. Also erhält man

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = (z-z_0)^{-N(g)} \sum_{n\geq 0} \beta_n (z-z_0)^n \qquad (\beta_0\neq 0)$$

sodass f einen Pol der Ordnung $N(g)$ in z_0 hat.

(ii) Eine wesentliche Singularität ist weder hebbar, noch ein Pol, sodass $\lim_{z\to z_0} |f(z)|$ in $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ nicht existiert. Umgekehrt, falls der Limes nicht existiert kann z_0 weder ein Pol noch eine hebbare Singularität sein, also ist z_0 eine wesentliche Sing.

Es bleibt zu beweisen: $\forall c \in \mathbb{C}$, $\forall \tilde{\varepsilon} > 0$ und $\forall \varepsilon > 0$, existiert ein $z \neq z_0$: $|z - z_0| < \varepsilon$ und $|f(z) - c| < \tilde{\varepsilon}$.
Wir nehmen an, $\exists\, c \in \mathbb{C}$, ein $\tilde{\varepsilon} > 0$, $\varepsilon > 0$, sodass $\forall z \in B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$, $|f(z) - c| \geq \tilde{\varepsilon}$. Dann ist

$g(z) := \dfrac{1}{f(z) - c}$ holomorph und beschränkt in $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$

sodass es eine analytische Erweiterung in $B(z_0, \varepsilon)$ gibt.
Wäre $g(z_0) = 0$, hiesse dass $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z) - c| = \infty$ und daher $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$, dann wäre mit (i) z_0 ein Pol von f; Widerspruch. Also ist $g(z_0) \neq 0$. Die Gleichung

$$f(z) = c + \frac{1}{g(z)}$$

zeigt aber in diesem Fall, dass f eine analytische Erweiterung in z_0 hat, d.h. z_0 ist eine hebbare Singularität; Widerspruch

- Eine Funktion $f : \emptyset \neq \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen heisst <u>meromorph</u>, falls es eine (leere, endliche oder unendliche) Folge $a_1, a_2, \ldots \in \Omega$ gibt, $S := \{a_1, a_2, \ldots\}$, sodass:
  i) S besitzt keinen Häufungspunkt in Ω
  ii) f ist holomorph in $\Omega \setminus S$ ($\Omega \setminus S$ ist offen)
  iii) a_j ist ein Pol von f, für jede j.

Eine holomorphe Funktion ist meromorph mit $S = \emptyset$.
Es ist natürlich zu schreiben: $f(a_j) = \infty$

<u>Beispiele</u>: * $\Omega = \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, wobei P, Q Polynome sind

Hier ist $|S| < \infty$, und S ist eine Untermenge der Nullstellen des Nennerpolynoms.

+ $\Omega = \mathbb{C}$: $f(z) = \dfrac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$

Wegen $\sin(\pi z) = 0 \iff z \in \mathbb{Z}$ und $|\cos(\pi z)| = 1$ ist $S = \mathbb{Z}$.

- Sei $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ die folgende Familie von geschlossenen Wegen:

$$\gamma_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto z_0 + r\exp(2\pi i k t)$$

(eine k-fach durchlaufende Kreislinie um z_0, Radius r).

Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} \frac{1}{\xi - z}\, d\xi = \begin{cases} k & \text{für alle } z : |z-z_0| < r \\ 0 & \text{——} \quad |z-z_0| > 0 \end{cases}$$

(Aufgabe 4, Blatt 3)
(oder C.I.F. für $f(z) = 1$)

d.h.: $\int_\gamma \frac{1}{\xi - z}\, d\xi$ gibt darüber Information, wie oft der Weg γ den Punkt z umläuft.

<u>Definition</u>: Sei γ ein geschlossener C^1-Weg und $z \in \mathbb{C}$, $z \notin \mathrm{Rand}(\gamma)$. Dann heisst

$$n(\gamma; z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\xi - z}\, d\xi$$

die <u>Umlaufzahl</u> von z bezüglich γ.

- <u>Satz 29</u>: $n(\gamma; z) \in \mathbb{Z}$ (bemerkenswert!)

<u>Beweis</u>: OE.d.A. $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{z\}$ und $\gamma \in C^1([a,b])$.

Sei $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$t \longmapsto \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds$$

wobei der Integrand eine stetige Funktion ist, sodass

$$h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}.$$

Sei nun $g: [a,b] \to \mathbb{C}$
$t \mapsto e^{-h(t)}(\gamma(t)-z)$

Die Funktion g ist differenzierbar und

$$g'(t) = \left[-h'(t)(\gamma(t)-z) + \gamma'(t)\right]e^{-h(t)} = 0 \quad \forall t \in [a,b],$$

sodass g konstant auf $[a,b]$. Mit $h(a)=0$ folgt, dass $g(t) = g(a) = \gamma(a)-z$, oder:

$$e^{h(t)} = \frac{\gamma(t)-z}{\gamma(a)-z} \qquad \forall t \in [a,b]$$

Da γ geschlossen ist, also $\gamma(b)=\gamma(a)$, folgt $e^{h(b)} = 1$, woraus

$$n(\gamma; z) = \frac{1}{2\pi i} h(b) \in \mathbb{Z}$$

□

- Da $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Ra}(\gamma)$ offen ist, $\exists\, r>0$, sodass $B(z,r) \subset \mathbb{C}\setminus \mathrm{Ra}(\gamma)$. Sei $w \in \mathbb{C}$: $|w| < \frac{r}{2}$. Dann sind γ und $\gamma - w$ schleifenhomotop in $\mathbb{C}\setminus\{z\}$

[Bem: der Beweis von Satz B läuft parallel, falls γ_0, γ_1 schleifenhomotop sind, d.h. γ_0, γ_1 sind geschlossene C^1-Wege und $\exists$ $H: [a,b]\times[0,1] \to \Omega$ sodass

$$H(t,0) = \gamma_0(t), \quad H(t,1) = \gamma_1(t)$$

und $\gamma_s(\cdot) := H(\cdot, s)$ ~~ein~~ geschlossener C^1-Weg ist.]

Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt, dass

$$\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\gamma - w} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

da $\frac{1}{\zeta - z}$ holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{z\}$ ist. Somit:

- Sei $\gamma_0 : [a,b] \to \Omega$, $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ zwei stetige Abbildungen, sodass $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$; $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$. γ_0 und γ_1 heißen <u>schleifenhomotop</u> wenn es eine stetige Abbildung $H: [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ gibt, sodass

  * $H(t,0) = \gamma_0(t)$; $H(t,1) = \gamma_1(t)$ $\forall t \in [a,b]$
  * $\gamma_s := H(\cdot, s) : [a,b] \to \Omega$ ist eine stetige Abbildung mit $\gamma_s(a) = \gamma_s(b)$ $(s \in [0,1])$

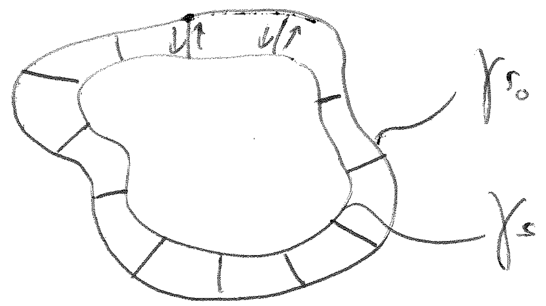
<u>Satz 13'</u>: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: \Omega \to \mathbb{C}$ eine in Ω holomorphe Funktion. Sind γ_0, γ_1 C^1-Wege in Ω, die in Ω schleifenhomotop sind, dann gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

Beweis: Parallel zum Beweis von Satz 13, wobei

$$0 = \sum_j \int_{\eta_j} f(z)\,dz ,$$

da:



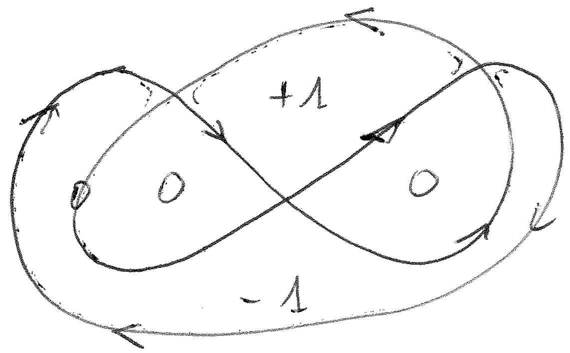
$\square$

$$2\pi i\, n(\gamma; z+w) = \int_\gamma \frac{1}{\xi-(z+w)}\,d\xi = \int_{\gamma-w} \frac{1}{\xi - z}\,d\xi$$
$$= \int_\gamma \frac{1}{\xi - z}\,d\xi = 2\pi i\, n(\gamma; z)$$

Also ist die Funktion:

$$n(\gamma; \cdot) : \mathbb{C} \setminus \mathrm{Rd}(\gamma) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

lokal konstant und insbesondere stetig. Damit ist sie auf jeder zusammenhängenden Teilmenge von $\mathbb{C}\setminus\mathrm{Rd}(\gamma)$ konstant.



- Sei z_0 eine isolierte Singularität der analytischen Funktion f und sei $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$ ihre Laurententwicklung um z_0.

Der Koeffizient a_{-1} heisst Residuum von f an der Stelle z_0.

$$a_{-1} = \mathrm{Res}(f; z_0)$$

konkret.

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \delta} f(\xi)\,d\xi$$

für $\delta > 0$ klein genug.

Per Definitionem ist $\mathrm{Res}(f; z_0) = 0$ für eine hebbare Singularität. Umgekehrt kann $\mathrm{Res}(f; z_0) = 0$ sein, ohne dass z_0 hebbar ist:

$$\mathrm{Res}(z^n; 0) = 0 \qquad \text{für alle } n \neq -1$$

• <u>Satz 30</u> (Residuensatz) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, $S \subset \Omega$ eine Menge, die keinen Häufungspunkt in Ω besitzt, und $f : \Omega \setminus S \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{s \in S} n(\gamma; s)\,\mathrm{Res}(f, s)$$

für jeden geschlossenen C^1-Weg $\gamma : [a,b] \to \Omega \setminus S$.
In der Summe treten nur endlich viele von Null verschiedene Summanden.

<u>Beweis</u>: OEdA nehmen wir an, dass jede $s \in S$ ein Pol oder eine wesentliche Singularität, denn sonst wäre $\mathrm{Res}(f,s) = 0$.
die Menge

$$\mathrm{Int}(\gamma) := \overline{\{z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Ran}(\gamma) : n(\gamma; z) \neq 0\}}$$

ist eine kompakte Teilmenge von Ω (ohne Beweis).
Sei H eine Schleifenhomotopie zwischen γ und dem einpunktigen Weg $\gamma(0)$ in Ω.
Dann ist $\mathrm{Int}(\gamma) \cup H([a,b] \times [0,1]) \subset \Omega$ kompakt, und da S keinen Häufungspunkt in Ω besitzt, ist

$$S \cap \Big(\mathrm{Int}(\gamma) \cup H([a,b] \times [0,1])\Big) =: \{z_1, \dots, z_k\}$$

eine endliche Menge, die alle $s \in S$ enthält, in denen $n(\gamma; s)\,\mathrm{Res}(f,s) \neq 0$.
Für jedes $n \in \{1, \dots, k\}$, sei

$$f_+^{(n)} : \mathbb{C} \setminus \{z_n\} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \sum_{j \geq 1} b_{-j}^{(n)} (z - z_n)^{-j}$$

der Hauptteil von f in z_n.
Damit ist die Funktion

$$\tilde{f}: \Omega \setminus S \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto f(z) - \sum_{n=1}^{k} f_+^{(n)}(z) \qquad (*)$$

analytisch und hat in jeden $z_1, \dots, z_k$ eine Laurententwicklung mit verschwindendem Hauptteil. Damit hat $\tilde{f}$ eine analytische Fortsetzung $g: (U\setminus S) \cup \{z_1, \dots, z_k\} \to \mathbb{C}$.
Definitionsgemäß ist $H([a,b] \times [0,1]) \subset (U \setminus S) \cup \{z_1, \dots, z_k\}$, und γ ist in $(U\setminus S)\cup\{z_1,\dots,z_k\}$ nullhomotop zu $\gamma(0)$.
Nach dem C.I.S.:

$$\int_\gamma g(z)\,dz = 0 \quad , \quad \text{d.h. (mit } (*))$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{k} \int_\gamma f_+^{(n)}(z)\,dz \overset{\text{maj. Konv.}}{=} \sum_{n=1}^{k} \sum_{j\geq 1} \int_\gamma b_{-j}^{(n)} (z-z_n)^{-j}\,dz$$

Für $j \geq 2$ haben die Funktionen $(z-z_n)^{-j}$ eine Stammfunktion, sodass alle Summanden für $j\geq 2$ verschwinden und

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{k} \int_\gamma b_{-1}^{(n)} (z-z_n)^{-1}\,dz = 2\pi i \sum_{s\in S} n(\gamma,s)\,\mathrm{Res}(f,s)$$

□

- Bemerkungen: i) Ist f in den Punkten $\{z_1, z_2, \dots\} = S$ analytisch fortsetzbar, dann gilt auch der Residuensatz:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

wie von Satz 12 bekannt ist.

ii) Ist f in Ω holomorph und $z \in \Omega$, dann ist

$$h: \Omega \setminus \{z\} \to \mathbb{C} \quad : \quad \xi \longmapsto h(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z}$$

holomorph in $\Omega \setminus \{z\}$. Mit

$$f(\xi) = \sum_{n \geq 0} a_n (\xi - z)^n \quad \text{in} \quad B(z, \rho)$$

gilt also

$$h(\xi) = \sum_{m \geq -1} a_{m+1} (\xi - z)^m \quad , \text{ in } B(z, \rho) \setminus \{z\}$$

sodass $\operatorname{Res}(h, z) = a_0 = f(z)$. Daher gilt

$$2\pi i \, n(\gamma; z) f(z) = \int_\gamma h(\xi) d\xi = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

was eine leichte Verallgemeinerung der Cauchyschen Intergralformel entspricht.

iii) Sei f holomorph in $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$. Falls z_0 ein Pol der Ordnung k ist, dann ist

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{A^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} \quad \text{mit} \quad A(z) = (z - z_0)^k f(z)$$

Im Fall $k = 1$:

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Tatsächlich: Ist z_0 ein Pol der Ordnung $k \geq 1$ gilt

$$\lim_{z \to z_0} |(z - z_0)^k f(z)| = |a_{-k}| > 0$$

so dass z_0 eine hebbare Singularität von A ist

und

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{A^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n .$$

Mit $f(z) = \sum_{n \geq -k} a_n (z - z_0)^n$ folgt aber

auch $A(z) = \sum_{n \geq -k} a_n (z - z_0)^{n+k}$

und mit der Eindeutigkeit der Taylorreihe

$$a_{-1} = \frac{A^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

- <u>Integralrechnungen und die ζ-Funktion</u>

1) Integrale vom Typ $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$

wobei $R(a,b) = \dfrac{P(a,b)}{Q(a,b)}$, P, Q sind Polynome

Falls $f(z) := \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}); \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})\right)$ keinen Pol in $\{z\in\mathbb{C} : |z| = 1\}$ hat, dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}(f; z_j),$$

wobei z_j die Singularitäten von f in $B(0,1)$ sind.
Das folgt aus

$$\int_{|z|=1} f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta,$$

der Parametrisierung $\gamma(\theta) = \exp(i\theta)$ und

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}) \\ \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}) \end{cases} \quad (z = \gamma(\theta))$$

und dem Residuensatz.
Beispiel:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta}\, d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} \qquad (a > 1)$$

Setzt man $R(x,y) = \frac{1}{\tilde{a}+x}$, dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{iz\left(\tilde{a} + \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)} = \frac{2}{i\left(z^2+2\tilde{a}z+1\right)}$$

$$= \frac{2}{i(z-z_+)(z-z_-)}, \quad z_\pm = -\tilde{a} \pm \sqrt{a^2-1}$$

Da $z_- < 1 < z_+ < 0$, erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\tilde{a}+\cos\theta}\, d\theta = 2\pi i \operatorname{Res}(f; z_+)$$

und $\operatorname{Res}(f; z_+) = \lim\limits_{z\to z_+} (z-z_+) f(z) = \frac{2}{i(z_+-z_-)} = \frac{1}{i\sqrt{a^2-1}}$

2) Integrale vom Typ $\int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x)\,dx$

Sei f holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{z_1,\dots,z_n\}$, mit $z_k \notin [0,\infty)$ und $\exists\, M, r, p > 0$ sodass

$$|f(z)| \le \frac{M}{|z|^p} \qquad z \in R(0;0,r)$$

$\&\ \exists\, N, R>r,\ q>p$ sodass

$$|f(z)| \le \frac{N}{|z|^q} \qquad z \in R(0;R,\infty)$$

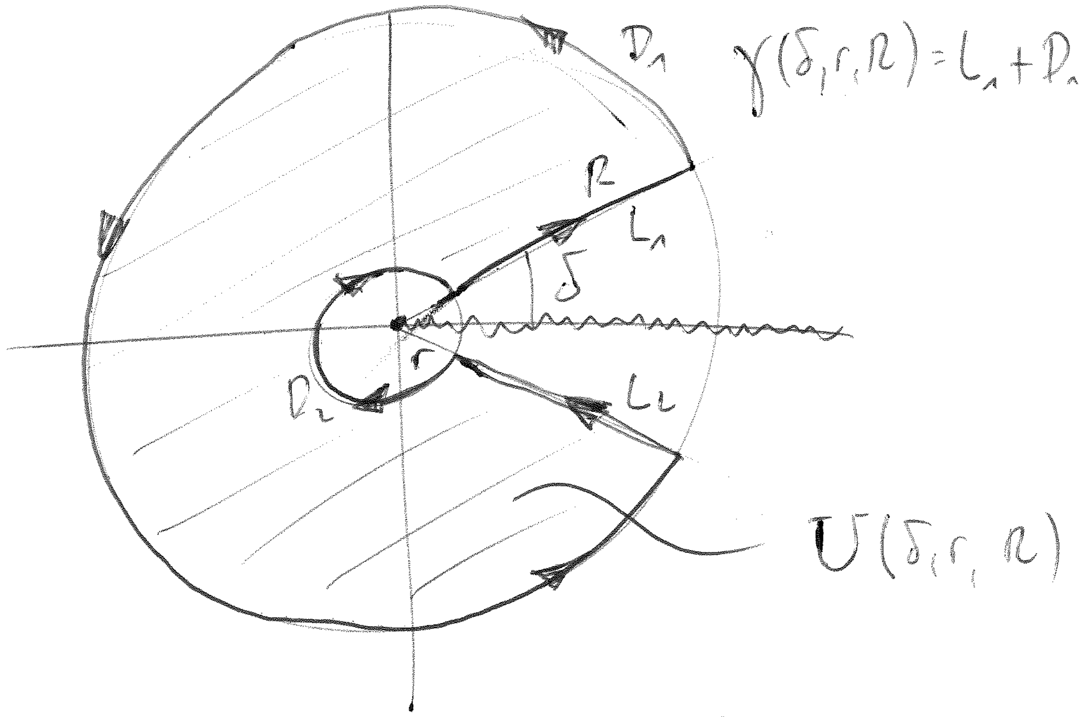
Dann konvergiert $\int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x)\,dx$ für $\alpha \in (p,q)\setminus\mathbb{N}$ absolut und

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x)\,dx = \frac{1}{1-\exp(2\pi i\alpha)}\, 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}(z^{\alpha-1}f(z); z_j)$$

$\alpha \notin \mathbb{N}$!

$\gamma(\delta, r, R)$ der folgende C^1-Weg:

$$\gamma(\delta, r, R) = L_1 + D_1 + L_2 + D_2$$



Mit $\delta > 0$ klein genug, $r > 0$ klein genug und $R > r$ gross genug gilt: $\{z_1, \dots, z_n\} \subset U(\delta, r, R)$.

Wir betrachten die Funktion

$$g(z) = z^{\alpha-1} f(z)$$

wobei
$$z^{\alpha-1} = \exp\Big((\alpha-1)(\ln|z| + i\operatorname{Arg}(z))\Big), \quad \operatorname{Arg}(z) \in [0, 2\pi)$$

sodass $\ln(z) = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z)$ in $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ holomorph ist.
Mit dem Residuensatz:

$$\int_{\gamma(\delta, r, R)} g(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\left(z^{\alpha-1} f(z), z_j\right)$$

* $$\int_{L_1} g(z)\,dz = \int_r^R g(te^{i\delta}) e^{i\delta}\,dt$$
$$= e^{i\delta} \int_r^R t^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)\delta} f(te^{i\delta})\,dt$$
$$= e^{i\alpha\delta} \int_r^R t^{\alpha-1} f(te^{i\delta})\,dt.$$

* $\int_{L_2} g(t)\,dt = -\int_r^R g\left(te^{i(2\pi-\delta)}\right)e^{i(2\pi-\delta)}\,dt$

wobei $e^{i(2\pi-\delta)} = e^{-i\delta}$ aber $-\delta \notin [0,2\pi)$, sodass

$$\ldots = -e^{-i\delta}\int_r^R t^{\alpha-1}e^{i(2\pi-\delta)(\alpha-1)}f(te^{-i\delta})\,dt$$

$$= -e^{i\alpha(2\pi-\delta)}\int_r^R t^{\alpha-1}f(te^{-i\delta})\,dt$$

$\rightarrow \lim_{\delta\downarrow 0}\left(\int_{L_1}+\int_{L_2}\right)(g(z)dz) = \left(1-e^{i2\pi\alpha}\right)\int_r^R t^{\alpha-1}f(t)\,dt$

was für $\alpha \notin \mathbb{N}$ das gesucht Integral im Limes $r\downarrow 0$, $R\nearrow\infty$ wieder liefert.

* $\int_{D_1} g(z)\,dz = \int_\delta^{2\pi-\delta} g(Re^{i\theta})\,iRe^{i\theta}\,d\theta$

$$= iR\int_\delta^{2\pi-\delta} R^{\alpha-1}e^{i(\alpha-1)\theta}f(Re^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta$$

$$= iR^\alpha\int_\delta^{2\pi-\delta} e^{i\alpha\theta}f(Re^{i\theta})\,d\theta$$

im Limes $\delta\downarrow 0$: $iR^\alpha\int_0^{2\pi} e^{i\alpha\theta}f(Re^{i\theta})\,d\theta$

und schliesslich

$$\lim_{R\nearrow\infty}|\cdot| \leq \lim_{R\nearrow\infty} 2\pi N\frac{R^\alpha}{R^q} = 0.$$

* Ähnlich $\left|\int_{D_2} g(t)\,dt\right| \xrightarrow{r\downarrow 0} 0$ (hier: $\alpha - p > 0$)

* Zusammenfassend:

$$2\pi i\sum_{j=1}^n \operatorname{Res}\left(z^{\alpha-1}f(z), z_j\right) = \lim_{R\nearrow\infty}\lim_{r\downarrow 0}\lim_{\delta\downarrow 0}\int_{\gamma(\delta,r,R)} g(z)\,dz$$

$$= \left(1-e^{2\pi i\alpha}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} t^{\alpha-1}f(t)\,dt$$

Beispiel: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+4)}\,dx$

$f(z) = (z+4)^{-1}$ hat ein Pol $z_0 = -4$, wo

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{1/2}(z+4)}; -4\right) = \lim_{z\to -4} (z+4)\frac{1}{z^{1/2}(z+4)}$$

$$= \lim_{z\to -4} \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{2}(\ln|z| + i\operatorname{Arg}(z))\right)} = \frac{1}{2e^{i\pi/2}} = \frac{1}{2i}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+4)}\,dx = \frac{2\pi i}{2i}\cdot\frac{1}{1-e^{\frac{1}{2}(2\pi i)}} = \frac{\pi}{2}$$

3) Integrale vom Typ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x)\,dx$

typischerweise: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$, s. Aufgaben.

4) $\zeta(2k)$. Die Riemannsche Zetafunktion:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^\infty n^{-s} \qquad (\operatorname{Re} s > 1)$$

ist absolut konvergent, da $\qquad (s = \sigma + it)$

$$|n^{-s}| = |\exp(-s\log n)| = |\exp(-\sigma\log n)| = n^{-\sigma}$$

und $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty n^{-\sigma} < \infty$ falls $\sigma > 1$.

Sei $\{B_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ die Bernoulli-Zahlen, die durch

$$(*) \qquad \frac{1}{\exp(z)-1} =: \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^\infty \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1} \qquad (|z| < 2\pi)$$

definiert sind.

Wir betrachten
$$f_k(z) := \frac{1}{z^{2k}(\exp(z)-1)} \qquad k\in\mathbb{N}$$

f_k hat Pole bei $z=0$ und $z=2\pi i n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Mit $(*)$ erhält man

$$\mathrm{Res}(f_k; 0) = \frac{B_{2k}}{(2k)!}$$

und da die anderen Singularitäten Pole der Ordnung 1 sind:

$$\mathrm{Res}(f_k; 2\pi i n) = \lim_{z\to 2\pi i n} (z-2\pi i n) f_k(z) = \frac{(-1)^k}{(2\pi n)^{2k}}$$

Mit $r>0$, $r\neq 2\pi n$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f_k(z)\,dz = \frac{B_{2k}}{(2k)!} + \sum_{\substack{n\neq 0\\ |2\pi n|<r}} \frac{(-1)^k}{(2\pi n)^{2k}} \qquad (**)$$

Wir betrachten weiter speziell $r_N := (2N+\frac{1}{2})\pi$, wo

$$\sup\{|(\exp(z)-1)^{-1}| : |z|=r_N,\ N\in\mathbb{N}\} = M < \infty,$$

sodass

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_N} f_k(z)\,dz\right| \leq r_N \frac{M}{r_N^{2k}} \longrightarrow 0 \quad (N\to\infty)$$

Das Limes $N\to\infty$ von $(**)$ liefert also:

$$\frac{B_{2k}}{(2k)!} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k}} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{n^{2k}}$$

und weiter:

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k} \qquad \text{(Euler, 1735)}$$

Also: $k=1$: $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Bemerkungen: * $\zeta(2k+1)$ sind wenig bekannt

* die ζ-Funktion ist eng mit den Primzahlen verbunden (s. später)

* sie kommt auch in der Physik oft vor.

- Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und f eine holomorphe Funktion in einem $z_0 \in \Omega \subset \mathbb{C}$, offen. z_0 ist eine <u>Nullstelle der Ordnung n</u> falls $f(z_0) = 0$ und $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ und $f^{(m)}(z_0) = 0$ für alle $m < n$.

Wie in den Aufgaben bemerkt wurde:

* z_0 ist ein Pol der Ordnung 1 von $\frac{f'}{f}$, mit
$$\operatorname{Res}(f'/f \,;\, z_0) = n \in \mathbb{Z}$$
* Falls z_0 hingegen ein Pol der Ordnung n ist, ist z_0 wieder ein Pol der Ordnung 1 von f'/f, mit
$$\operatorname{Res}(f'/f \,;\, z_0) = -n \in \mathbb{Z}.$$

Die Funktion $h(z) := f'(z)/f(z)$ heisst <u>logarithmische Ableitung von f</u>: Ist g eine holomorphe Funktion, sodass
$$f = \exp(g) \qquad (\text{s. Satz } 14),$$
dann gilt $g' = f'/f$, sodass h die Ableitung von $\log(f)$ ist.

- <u>Satz</u> 31: Sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet, f eine in Ω meromorphe Funktion, und γ ein geschlossener C^1-Weg in Ω. Wir nehmen an:
  i) f hat endlich viele Pole $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ der Ordnung m_j $(1 \leq j \leq n)$ und $\beta_j \in \Omega \setminus \operatorname{Ran}(\gamma)$.
  ii) sei $a \in \mathbb{C}$. Die Menge
  $$f^{-1}(a) = \{z \in \Omega : f(z) = a\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$$
  ist endlich mit α_j ist eine Nullstelle der Ordnung n_j von $f - a$, $\alpha_j \in \Omega \setminus \operatorname{Ran}(\gamma)$.

Dann:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)-a} \, dz =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} n_j \, g(\alpha_j) \, n(\gamma; \alpha_j) - \sum_{j=1}^{M} m_j \, g(\beta_j) \, n(\gamma; \beta_j)$$

für jede in Ω holomorphe Funktion g.

<u>Korollar</u> (Argumentprinzip). Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \Omega$, $r > 0$: $B(z_0, r) \subset \Omega$, $\gamma : \gamma(t) = z_0 + r\exp(it)$ $t \in [0, 2\pi]$, und f hat keine Nullstelle in $\mathrm{Ran}(\gamma)$.

Dann gilt:

$$(*) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz = n(f \circ \gamma; 0)$$

$= \text{Summe der } \begin{cases} \text{Ordnungen der} \\ \text{Nullstellen} \end{cases} \text{ von } f \text{ in } B(z_0, r)$.

• <u>Beweis von Satz</u>: Die Singularitäten von

$$h(z) := g(z) \frac{f'(z)}{f(z)-a}$$

sind die Nullstellen $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ von $f(z) - a$ und die Pole $\{\beta_1, \dots, \beta_M\}$ von f. α_j ist nämlich ein Pol der Ordnung 1 von $(f-a)'/(f-a)$, mit

$$\mathrm{Res}\left(f'/f(\cdot)-a \,;\, \alpha_j \right) = n_j$$

und β_j ist ein Pol der Ordnung 1 von $(f-a)'/(f-a)$,

$$\mathrm{Res}\left(f'/f(\cdot)-a \,;\, \beta_j \right) = -m_j$$

Da g holomorph ist:

$$\mathrm{Res}(h; \alpha_j) = g(\alpha_j) n_j$$

$$\mathrm{Res}(h; \beta_j) = -g(\beta_j) m_j$$

Satz 31 folgt dann mit dem Residuensatz 30 □

Beweis vom Korollar: da f holomorph ist, ist $\delta := f \circ \gamma$ ein C^1-Weg. Da f keine Nullstelle in $Ran(\gamma)$ hat ist $0 \in \mathbb{C} \setminus Ran(\delta)$.

Dann gilt:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{(f \circ \gamma)'(t)}{(f \circ \gamma)(t)} dt$$

$$= \int_\delta \frac{1}{z} dz = 2\pi i \, n(\delta; 0)$$

Die zweite Aussage folgt aus Satz 31, wobei f keine Pole hat und $n(\gamma; \alpha_j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha_j \in D(z_0, r) \\ 0, & \text{falls } \alpha_j \in \Omega \setminus \overline{B(z_0,r)} \end{cases}$ □

- Wir betrachten weiter eine Familie f_t, $0 \leq t \leq 1$ von holomorphen Funktionen in Ω:

- **Satz 32**: Sei $z_0 \in \Omega$, $r > 0$: $\overline{B(z_0,r)} \subset \Omega$, und $f_t(z) \neq 0 \quad \forall t \in [0,1]$, $|z - z_0| = r$.
  Falls $t \mapsto f_t(z)$ für jede $z \in \Omega$ stetig ist, und lokal gleichmässig in z stetig ist, dann ist die Anzahl der Nullstellen von f_t in $B(z_0,r)$ unabhängig von t.

Bem: Anzahl der Nullstellen = Summe der Ordnungen aller Nullstellen.

Beweis: Da $f_t'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f_t(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$, ist f_t' auch stetig in t und lokal gleichmässig in z stetig in t.
Daher ist f_t'/f_t stetig in t, gleichmässig in $z \in \partial B(z_0,r)$. Aus (∗) folgt, dass die Anzahl

der Nullstellen eine stetige Funktion von t ist, und da es $\in \mathbb{Z}$ ist, muss es eine konstante Funktion sein. $\square$

<u>Bem</u>: Das ist falsch für $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Beispiel:

$$f_t(x) = x^2 - t \quad , \; x \in [-1,1] \quad , \; t \in [-1,1]$$

hat zwei Nullstellen für $t \geq 0$, und keine für $t < 0$: sie sind in die komplexe Ebene "gerutscht"!

- <u>Satz 33</u> (Rouché). <u>Sei $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$</u> holomorph und $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$. Falls

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \qquad (z \in \partial B(z_0, r))$$

dann haben f und g keine Nullstellen auf $\partial B(z_0, r)$ und dieselbe Anzahl an Nullstellen in $B(z_0, r)$.

<u>Beweis</u>: Sei für $t \in [0,1]$

$$f_t(z) := (1-t) f(z) + t g(z)$$

Wir nehmen an, $\exists\, t_0 \in [0,1]$ und $\alpha \in \partial B(z_0, r)$: $f_{t_0}(\alpha) = 0$. Dann gelten:

i) $f(\alpha) = t_0 (f(\alpha) - g(\alpha))$

ii) $g(\alpha) = (1 - t_0)(g(\alpha) - f(\alpha))$

Daher:

$$|f(\alpha)| + |g(\alpha)| = |f(\alpha) - g(\alpha)|$$

was der Annahme widerspricht. Also hat f_t keine Nullstelle auf $\partial B(z_0, r)$ für alle $t \in [0,1]$, und der Satz folgt aus Satz 32 bei $t = 0$, $t = 1$. $\square$

- <u>Bem</u>: Mit dem Satz von Rouché lässt sich der Fundamentalsatz der Algebra einfach herleiten, s. Aufgaben.

8) Fourierreihen & die Fouriertransformation

- Wir brauchen zuerst einen Hilfsatz über das Verhältnis einer holomorphen Funktion in der Umgebung eines nicht-kritischen Punktes

<u>Satz 34</u>: Sei Ω ein Gebiet, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in \Omega$, sodass

$$w_0 := f'(z_0) \neq 0$$

Dann existieren $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, sodass für jede $w \in B(w_0, \varepsilon)$, $\exists$ eine eindeutige $z \in B(z_0, \delta)$ mit

$$f(z) = w$$

Weiter existiert eine injektive holomorphe Funktion

$$g : B(w_0, \varepsilon) \to B(z_0, \delta),$$ sodass

$$f(g(w)) = w$$

und $$g'(w) = 1/f'(g(w))$$

<u>Beweis</u>: z_0 ist eine Nullstelle erster Ordnung von $f(z) - w_0$, sodass $f(z) - w_0 = (z - z_0) h(z)$, mit $h(z_0) \neq 0$.

Sei $\delta > 0$: $B(z_0, \delta) \subset \Omega$ und $|h(z)| \geq \frac{1}{2} |h(z_0)|$ auf $B(z_0, \delta)$ (per Stetigkeit).

Damit ist $|f(z) - w_0| \geq 2\varepsilon \quad \forall z \in \partial B(z_0, \delta)$, wobei $\varepsilon = \frac{1}{4} |h(z_0)| \delta$. Für ~~...~~ $w \in B(w_0, \varepsilon)$:

$|f(z) - w| \geq |f(z) - w_0| - |w - w_0| > \varepsilon > 0$. Insbesondere hat die Familie

$$f_t(z) := f(z) - (tw + (1-t) w_0), \quad t \in [0, 1]$$

keine Nullstelle auf $\partial B(z_0, \delta)$. Mit Satz 32 folgt dann, dass $f(z) - w$ eine einzige Nullstelle erster Ordnung in $B(z_0, \delta)$ hat. Sei nun

$$(*) \quad g(w) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\delta} \frac{z f'(z)}{f(z) - w} \, dz \quad , \quad w \in B(w_0, \varepsilon)$$

Mit Satz 31 ist dann $f(g(w)) = w$, und weiter

$$f'(g(w))\, g'(w) = 1$$

Dass g holomorph ist, folgt aus $(*)$, eine Approximation vom Integral durch Riemannsummen und dem folgenden Satz: $\square$

<u>Satz 35</u> (Weierstrass) Sei Ω ein Gebiet und $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von in Ω holomorphen Funktionen. Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass

$$\lim_{n \to \infty} \sup \{ |f(z) - f_n(z)| : z \in K \} = 0$$

für alle kompakten Mengen $K \subset \Omega$ (lokal gleichmässige Konvergenz). Dann ist f holomorph in Ω.

<u>Beweis</u>: Sei $z \in \Omega$ und $\delta > 0$: $\overline{B(z, 2\delta)} \subset \Omega$. Dann konvergiert $f_n \to f$ gleichmässig in $\overline{B(z, \delta)}$, sodass f stetig in $B(z, \delta)$. Für jedes Dreieck $T \subset B(z, \delta)$ gilt

$\int_T f_n(z)\, dz = 0$ und bei dominierter Konvergenz folgt

$\int_T f(z)\, dz = 0$, sodass f holomorph in $B(z, \delta)$ ist

(mit Satz 17, Morera). Da z beliebig in Ω ist, ist f holomorph in Ω. $\square$

- Damit kann man Fourierreihen $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \exp(2\pi i n x)$ untersuchen.

- **Satz 36**: Sei $a, b > 0$ und ~~$b > a$~~

$$\Omega_{a,b} := \{ z \in \mathbb{C} : -a < \operatorname{Im} z < b \}$$

Sei $f : \Omega_{a,b} \to \mathbb{C}$, holomorph und so, dass

$$f(z+1) = f(z).$$

Dann existieren $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $a_n \in \mathbb{C}$ sodass

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \exp(2\pi i n z) \qquad (*)$$

wobei die Reihe in $\Omega_{\tilde{a},\tilde{b}}$ gleichmäßig konvergiert, für alle $-a < -\tilde{a} < \tilde{b} < b$.

Es gilt:

$$a_n = \int_0^1 f(x+iy) \exp(-2\pi i n (x+iy))\, dx$$

wobei das Integral unabhängig von $y \in (-a, b)$ ist,

und $$|a_n| \leq C_{\tilde{a},\tilde{b}} \min \{ \exp(-2\pi \tilde{a} n), \exp(+2\pi \tilde{b} n) \} \quad (**)$$

Umgekehrt: Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ eine Folge, die $(**)$ erfüllt, für alle n und $-a < -\tilde{a} < \tilde{b} < b$. Dann konvergiert die Reihe $(*)$ gleichmäßig in $\Omega_{\tilde{a},\tilde{b}}$ und sie definiert eine holomorphe Funktion, die periodisch ist.

Beweis: Sei $h : \Omega_{a,b} \to \mathbb{R}_{r,R}$, $r = \exp(-2\pi b)$, $R = \exp(2\pi a)$

$$z \mapsto h(z) = \exp(2\pi i z)$$

h ist surjektiv aber nicht injektiv, mit

$$h(z) = h(z') \iff z - z' \in \mathbb{Z} \qquad (\text{Bsp } 7)$$

Da f periodisch ist, folgt, dass f eine konstante Funktion auf jede Menge der Form

$$\{ z \in \mathbb{C} : h(z) = \zeta \}$$

für $\zeta \in \mathbb{R}_{r,R}$. Sei nun $g : \mathbb{R}_{r,R} \to \Omega$, so definiert, dass $g(\zeta) = f(z)$, wobei $\zeta = h(z)$, d.h.

$$f(z) = g\left(\exp(2\pi i z)\right) \qquad (\diamond)$$

Nun ist $h'(z) = 2\pi i\, h(z) \neq 0 \;\; \forall z \in S_{a,b}$, sodass es mit Satz 34 eine lokal holomorphe inverse Funktion h^{-1} existiert und

$$g(\zeta) = f(h^{-1}(\zeta))$$

ist holomorph in $B(\zeta_0, \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$. Da ζ_0 beliebig in $R_{r,R}$ ist, ist g holomorph in $R_{r,R}$.

Also konvergiert die Laurentreihe

$$g(\zeta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \zeta^n$$

normal in $R_{\tilde r, \tilde R}$ für alle $r < \tilde r < \tilde R < R$, siehe 76.

Dabei sind

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = \rho} \frac{g(\zeta)}{(\zeta)^{n+1}}\, d\zeta \qquad (\diamond\diamond)$$

für alle $r < \rho < R$.

Aus $(\diamond)$ folgt $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (\exp(2\pi i z))^n$, nämlich $(*)$, und die Konvergenz in abgeschlossenen Horizontalstreifen.

In $(\diamond\diamond)$: sei $2\pi y = -\log \rho$ und der Weg wird

$$[0,1] \to \partial B(0,\rho)$$
$$x \mapsto \rho \exp(2\pi i x) = \exp(2\pi i (x+iy))$$

parametrisiert, sodass mit $(\diamond)$ gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \int_0^1 \frac{g\left(\exp(2\pi i(x+iy))\right)}{\exp\left(2\pi i (n+1)(x+iy)\right)} \exp(2\pi i (x+iy))\, dx$$

$$= \int_0^1 f(x+iy) \exp\left(-2\pi i n (x+iy)\right) dx$$

Sei $C_{\tilde a, \tilde b} := \sup_{\substack{x \in [0,1] \\ y \in (\tilde a, \tilde b)}} |f(x+iy)|$. Dann ist

$$|a_n| \leq C_{\tilde a, \tilde b} \exp(2\pi n y) \quad \text{für alle } y \in (-\tilde a, \tilde b)$$

und die kleinste obere Schranke wird bei $y \to -\tilde a$ im Fall $n \geq 0$ erreicht und bei $y \to \tilde b$ falls $n \leq -1$.

Umgekehrt definiert $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \xi^n$ eine konvergente Laurentreihe auf $R_{\hat r, \tilde R}$, mit

$$\tilde R = 1 / \limsup \sqrt[n]{\exp(-2\pi n \tilde a)} = \exp(2\pi \tilde a)$$
$$\hat r = \exp(-2\pi \tilde b)$$

sodass $(*)$ normal konvergiert auf

$$\exp(-2\pi \tilde b) < |\exp(2\pi i z)| < \exp(2\pi \tilde a),$$

nämlich $-\tilde a < \operatorname{Im} z < \tilde b$ für alle $-a < \tilde a < \tilde b < b$.

Mit Satz 35 definiert $(*)$ eine holomorphe Funktion für $\Omega_{a,b}$.

Dass $f(z+1) = f(z)$ folgt aus $\exp(2\pi i n z) = \exp(2\pi i (n)(z+1))$ $\square$

Definition: Eine ganze Funktion f heisst <u>periodisch mit Periode</u> $\tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, falls

$$f(z + n\tau) = f(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$.

<u>Korollar</u>: Eine ganze periodische Funktion f mit Periode τ hat eine lokal gleichmäßig konvergente <u>Fourierreihe</u>

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \exp(2\pi i z \tau^{-1}) \qquad (*)$$

wobei $\forall \mu > 0, \exists C_\mu$:

$$|a_n| \leq C_\mu \exp(-\mu n) \qquad (**)$$

Umgekehrt definiert jede Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $(\ast\ast)$ eine ganze periodische Funktion durch $(\ast)$.

Beweis: Man betrachtet $\tilde{f}(z) := f(z\tau^{+1})$, die alle Annahmen vom Satz 36 für alle a,b erfüllt.

- In Worten: Für periodische Funktionen ist Analytizität äquivalent zu exponentiellem Abfall (in n) der Fourierkoeffizienten.

- Def: Sei $a>0$. $\mathcal{F}_a$ ist die Familie von Funktionen $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, sodass

  i) f ist holomorph in
  $$S_a := \{z\in\mathbb{C} : -a < \mathrm{Im}(z) < a\}.$$

  ii) $\exists\, A>0$, sodass
  $$|f(x+iy)| \leq \frac{A}{1+x^2}$$
  für alle $x+iy\in S_a$.

Weiter bezeichnen wir $\mathcal{F} := \bigcup\limits_{a>0} \mathcal{F}_a$

Beispiele:
- $f(z) = \exp(-z^2)$, $f\in\mathcal{F}_a$ $\forall a>0$.
- $f(z) = \dfrac{c}{c^2+\cancel{z}}$, $f\in\mathcal{F}_a$ $0<a<c$
- $f(z) = \dfrac{1}{\cosh(\pi z)}$, $f\in\mathcal{F}_a$ $0<a<\frac{1}{2}$

- Def: Sei $f\in\mathcal{F}$. Die Funktion $\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$,
  $$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\xi x)\, f(x)\,dx$$
  heißt Fouriertransformation von f.

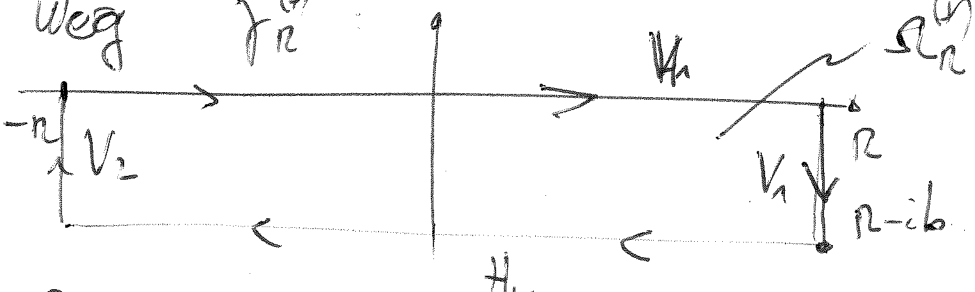
. <u>Satz 37</u> : Sei $f \in \mathcal{F}_a$, $a > 0$. Dann gilt $\exists B > 0$:

$$|\hat{f}(\xi)| \leq B \exp(-b|\xi|)$$

für alle $0 \leq b < a$.

<u>Beweis</u> : • Der Fall $b = 0$: $|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{1+x^2} dx < \infty$.

* Sei $0 < b < a$. Wir betrachten zuerst $\xi \geq 0$, und der Weg $\gamma_R^{(+)}$



Die Funktion $z \mapsto f(z)\exp(-i\xi z)$ ist holomorph in $\Omega_R^{(+)}$, sodass für alle $R > 0$:

$$(*) \qquad \int_{\gamma_R^{(+)}} f(z)\exp(-i\xi z)\,dz = 0 . \qquad (\xi \geq 0)$$

i) $\int_{V_1} f(z)\exp(-i\xi z)dz = -i\int_0^b f(R-it)\exp(-i\xi(R-it))dt$

$$|\cdot| \leq \frac{A}{1+R^2} \int_0^b \exp(-\xi t)\,dt \longrightarrow 0 \qquad (R \to \infty)$$

ii) Ähnlich verschwindet der Beitrag entlang V_2 im Limes $R \to \infty$.

Nun: Aus $(*)$ folgt also:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-ib)\exp(-i\xi(x-ib))\,dx$$

und so

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{1+x^2} dx \right) \exp(-b\xi)$$

Falls $\xi < 0$ wird der Weg $\gamma_R^{(-)}$, der in der oberen Halb- betrachtet ebene verläuft. Bei $\xi = 0$ schreibt man wie im Fall $b=0$.

Satz 38: Sei $f \in \mathfrak{F}$. Dann gilt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \exp(i\xi x)\, d\xi$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wir zerlegen zuerst $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\exp(i\xi x)\,d\xi = \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}\right)(\ldots)$
$= I_-(x) + I_+(x)$.

Sei $a > 0$: $f \in \mathfrak{F}_a$ und $0 < b < a$. Aus dem Beweis von Satz 37 folgt:

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-ib)\exp(-i\xi(x-ib))\,dx$$

Die Funktion:

$$(y,\xi) \mapsto f(y-ib)\exp(-i\xi(y-ib))\exp(i\xi x)$$

ist absolut integrierbar in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da

$$|f(y-ib)\exp(-i\xi(y-ib))\exp(i\xi x)| \leq \frac{\exp(-\xi b)}{1+y^2},$$

sodass

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \hat{f}(\xi)\exp(i\xi x)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y-ib) \underbrace{\int_0^\infty \exp(-i\xi(y-x-ib))\,d\xi}_{=1/(b+i(y-x))}\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{H_b^{(+)}} \frac{f(z)}{z-x}\,dz$$

wobei $H_b^{(+)} := \{ y - ib : y \in \mathbb{R} \}$

Ähnlich folgt:

$$I_-(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{H_b^{(-)}} \frac{f(z)}{z-x}\,dz.$$

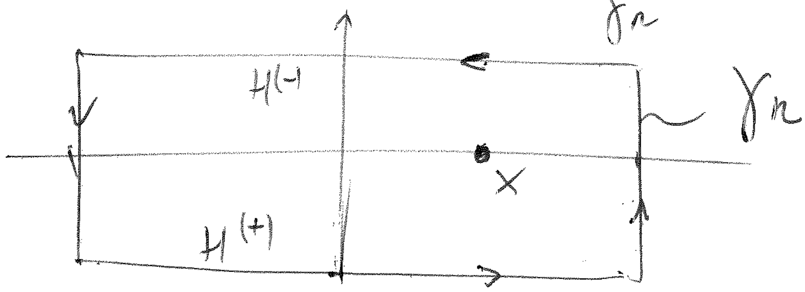
Weiter gilt:

$$\int_{-b}^{b} \frac{f(R+it)}{R+it-x}\, i\,dt \longrightarrow 0 \quad (R\to\infty)$$

Mit dem Residuensatz:

$$f(x) = \operatorname{Res}\left(\frac{f(\cdot)}{\cdot - x}; x\right) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = I_-(x) + I_+(x)$$

wobei



$\square$

- Bemerkung: * Eine ganze Funktion f, für die
$$|f(x+iy)| \leq \frac{A}{1+x^2}$$
gilt, kann als
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\xi x)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$
dargestellt werden, wobei $\forall b>0,\ \exists B$:
$$|\hat{f}(\xi)| \leq B \exp(-b|\xi|),$$
s. Korollar auf S. 86.
* Die Umkehrung davon hat verschiedene Varianten, die alle unter dem Namen Paley-Wiener bekannt sind.

- Satz 39 (Poissonsche Summenformel) Sei $f \in \mathcal{F}$. Dann
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n)$$
und beide Reihen sind absolut konvergent.

• Beweis. Sei $a > 0$ sodass $f \in \mathcal{F}_a$ und $0 < b < a$.

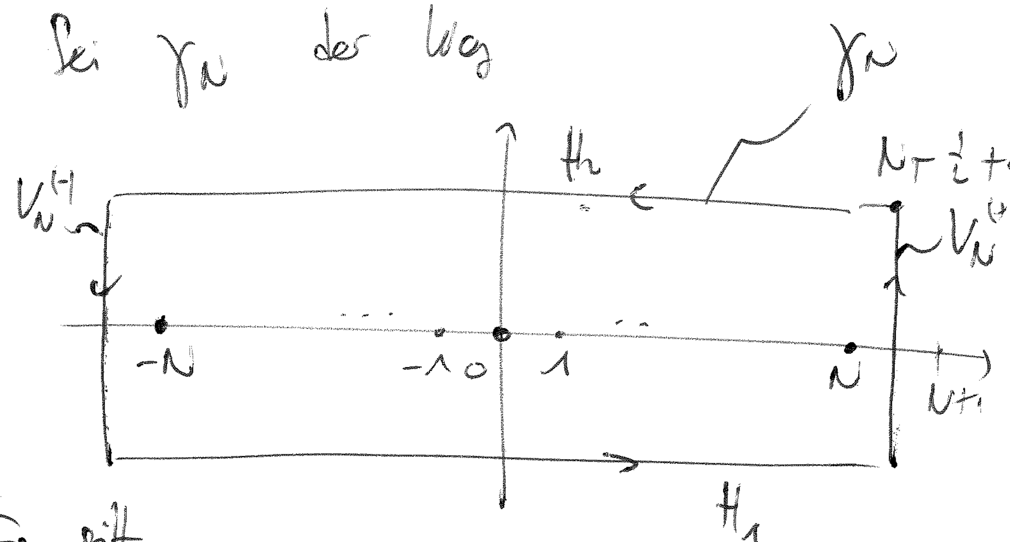
Die Funktion $(\exp(2\pi i z) - 1)^{-1}$ hat Pole erster Ordnung bei $n \in \mathbb{Z}$, mit

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{\exp(2\pi i z) - 1}; n\right) = \lim_{z \to n} (z-n)\frac{1}{\exp(2\pi i z) - 1} = \frac{1}{2\pi i},$$

und

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{\exp(2\pi i z) - 1}; n\right) = \frac{f(n)}{2\pi i} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Sei γ_N der Weg



$(N \in \mathbb{N})$

Es gilt.

$$\int_{\gamma_N} \frac{f(z)}{\exp(2\pi i z) - 1}\, dz = \sum_{|n| \le N} f(n)$$

Die Reihe konvergiert mit $N \to \infty$, da $|f(n)| \le \frac{A}{1+n^2}$.
Die Beiträge zu den Wegen $V_N^{(\pm)}$ zum Integral verschwinden in diesem Limes, da $|\exp(2\pi i z) - 1|^{-1}$ gleichmäßig beschränkt auf $\{V_N^{(\pm)} : N \in \mathbb{N}\}$ ist. Also gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \int_{H_1} \frac{f(z)}{\exp(2\pi i z) - 1}\, dz - \int_{H_2} \frac{f(z)}{\exp(2\pi i z) - 1}\, dz$$

Auf H_1 ist $|\exp(2\pi i z)| = \exp(2\pi b) > 1$, sodass

$$(\exp(2\pi i z) - 1)^{-1} = \exp(-2\pi i z)\left(1 - \exp(-2\pi i z)\right)^{-1}$$

$$= \exp(-2\pi i z) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-2\pi i n z)$$

Ähnlich auf H_2, wo $|\exp(2\pi i z)| = \exp(-2\pi b) < 1$:

$$(\exp(2\pi i z) - 1)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \exp(2\pi i n z)$$

Damit folgt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \int_{H_1} f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-2\pi i (n+1) z)\, dz$$
$$+ \int_{H_2} f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(2\pi i n z)\, dz ,$$

und $\int$ und $\sum$ dürfen vertauscht werden. Da $f(z)\exp(2\pi i n z)$ keine Singularität hat, können die zwei Wege wie im Beweis von Satz 37 "verschoben" werden, sodass

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-2\pi i (n+1) t)\, dt$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(2\pi i n t)\, dt \Big\}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \big(\hat{f}(2\pi(n+1)) + \hat{f}(-2\pi n) \big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n) \qquad \square$$

- Umgekehrt kann die Analytizität von f aus dem Abfall von $\hat{f}$ wieder bekommen werden. Dafür muss aber die Fourierinversionsformel (Satz 38) weiter gelten.

Sei $\mathcal{M}$ die Familie von $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

i) $\exists A > 0$: $|f(x)| \leq A/(1+x^2)$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $\exists A' > 0$: $|\hat{f}(\xi)| \leq A'/(1+\xi^2)$ $\quad \forall \xi \in \mathbb{R}$

wobei $\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\xi x) f(x)\, dx$ wegen (i) auch wohl definiert ist.

Für $f \in \mathcal{M}$ gelten:

a) Sei $f_y(x) := f(x+y)$. Dann
$$\widehat{f_y}(\xi) = \exp(iy\xi)\hat{f}(\xi)$$

b) Sei $f^\delta(x) := f(\delta x)$. Dann
$$\widehat{f^\delta}(\xi) = \delta^{-1}\hat{f}(\delta^{-1}\xi) \qquad (\delta > 0)$$

und weiter: für $f, g \in \mathcal{M}$ ist die Funktion
$$(x,\xi) \longmapsto \exp(-i\xi x) f(x) g(\xi)$$
absolut integrierbar, sodass
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) g(x)\,dx$$
mit dem Satz von Fubini.

Wir betrachten weiter $K_\delta(x) := \delta^{-1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\delta}\right)$:

* $\int_{\mathbb{R}} K_\delta(x)\,dx = \sqrt{2\pi}$ (s. Aufgaben)
* Für jedes $\varepsilon > 0$: $\lim_{\delta \downarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} K_\delta(x)\,dx = 0$,

da $\int_{|y|>\varepsilon} K_\delta(y)\,dy = \int_{|x|>\varepsilon/\sqrt{2\delta}} \exp(-x^2)\,dx \longrightarrow 0$.

* Sei $G_\delta(x) := \exp\left(-\frac{\delta}{2}x^2\right)$. Da
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(x \pm i\xi)^2\right)dx = 1 \quad \text{(s. Aufgaben) gilt}$$
$$\widehat{G_\delta}(\xi) = K_\delta(\xi)$$

Also: $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) K_\delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) G_\delta(\xi)\,d\xi$$

und im Limes $\delta \downarrow 0$:

$$\sqrt{2\pi}\, f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, d\xi .$$

Nun gilt:

$$(\Diamond) \quad f(x) = f_x(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f_x}(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\xi x)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi ,$$

wobei das Integral durch $f \in \mathcal{M}$ absolut konvergent ist.

. <u>Satz 40</u>. Sei $f \in \mathcal{M}$, und $A, a > 0$ sodass

$$|\hat{f}(\xi)| \leq A \exp(-a|\xi|)$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Dann $\exists\, h \in \mathfrak{F}_a$, sodass

$$f = h\restriction_{\mathbb{R}} .$$

<u>Beweis</u>: Für $n \in \mathbb{N}$, sei

$$f_n(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} \hat{f}(\xi) \exp(i\xi z)\, d\xi$$

Als Riemannintegral ist das rechte Glied ein gleichmäßiger Limes von ganzen Funktionen, sodass f_n mit Satz 35 auch ganz ist.

Sei nun $z \in S_b$, $0 < b < a$. Dann gilt

$$|\hat{f}(\xi) \exp(i\xi z)| \leq A \exp(-a|\xi|) \exp(b|\xi|),$$

sodass

$$h(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\xi z)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

in S_b wohldefiniert ist, und $h\restriction_{\mathbb{R}} = f$ mit $(\Diamond)$.

$$|h(z) - f_n(z)| \leq \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{|\xi| \geq n} \exp(-(a-b)|\xi|)\, d\xi \xrightarrow[(n \to \infty)]{} 0$$

sodass $f_n \to h$ gleichmässig in S_b für alle $0 < b < a$. Mit Satz 35 folgt, dass h holomorph in S_a ist. $\square$

- Bemerkung: * Der Satz kann verstärkt werden. Falls $|f(x)| \leq A(1+x^2)^{-1}$ und f stetig ist, dann hat f eine ganze Fortsetzung h mit

$$|h(z)| \leq A' \exp(M|z|)$$

genau dann falls $\operatorname{supp}(\hat{f}) \subset [-\Pi, \Pi]$

* Ähnliche Sätze können auch in anderen Funktionenräume bewiesen werden, etwa $L^2(\mathbb{R})$ oder im Schwartzraum $S(\mathbb{R})$.

8) Der Riemannsche Abbildungssatz

- Die Frage: Sei U, V zwei offene Mengen in $\mathbb{C}$. Gibt es eine holomorphe bijektive Funktion $f: U \to V$, und ist sie eindeutig?

<u>Def</u>: Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ heisst <u>Elementargebiet</u>, wenn jede auf Ω definierte holomorphe Funktion eine Stammfunktion in Ω besitzt.

Wir haben schon bemerkt: (Satz 14) Falls $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph ist und $f(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega$, dann existieren

i) h : $f(z) = \exp(h(z))$

ii) g_n : $f(z) = (g_n)^n$ $\quad n = 2, 3, \ldots$

<u>Satz 41</u>. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, sodass $\Omega \neq \{\mathbb{C}, \emptyset\}$. Sei $z_0 \in \Omega$. Dann existiert eine eindeutige bijektive holomorphe Funktion $F: \Omega \to B(0,1)$ sodass

$$F(z_0) = 0 \quad , \quad F'(z_0) > 0 .$$

Bemerkungen:
- Riemann 1851
- Als Korollar: Sei Ω, Ω' zwei einfach zusammenhängende Gebiete ($\Omega, \Omega' \neq \{\mathbb{C}, \emptyset\}$). Dann sind sie aus dem Cauchyschen Integralsatz (schleifenhomotope Version) auch Elementargebiete. Dann $\exists\, F: \Omega \to \Omega'$ holomorph und bijektiv.
- sehr wenig Annahmen (z.B. keine Glattheit des Randes)!
- Der Fall $\Omega = \mathbb{C}$. Falls eine holomorphe $F: \Omega \to B(0,1)$

gäbe, dann wäre $|F|$ insbesondere beschränkt, und mit dem Liouvilleschen Satz also konstant, deswegen nicht bijektiv. Die Annahme $\Omega \neq \mathbb{C}$ ist natürlich.

- Korollar: Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist Ω ein Elementargebiet gdw Ω einfach zusammenhängend ist.

Beweis: $\Leftarrow$) C.I.S. schleifenhomotopieversion und f hat eine Stammfunktion $\Leftarrow$ $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für alle geschlossenen C^1-Wege γ in Ω.

$\Rightarrow$) * Falls $\Omega = \mathbb{C}$, dann ist es einfach zusammenhängend.

* Sei $\Omega \neq \mathbb{C}$. Dann $\exists F : \Omega \to B(0,1)$ holomorph und bijektiv. Also ist $F \circ \gamma$ für jede Schleife γ in Ω eine Schleife in $B(0,1)$, die nullhomotop ist (über die Homotopie $H(s,t)$). Da F^{-1} selbst holomorph ist (s. später) ist $K(s,t) := F^{-1}(H(s,t))$ eine Homotopie in Ω, mit

$$K(0,t) = (F^{-1} \circ F \circ \gamma)(t) = \gamma(t) \qquad \forall t \in [a,b]$$
$$K(1,t) = (F^{-1} \circ F \circ \gamma)(a) = \gamma(a) \qquad \forall t \in [a,b]$$

sodass γ nullhomotop in Ω ist. $\square$

- Eine bijektive holomorphe Funktion $F : U \to V$ heisst konforme Abbildung.

Da F bijektiv ist, ist sie nicht konstant und deswegen offen, nämlich $F(U)$ ist offen. Es folgt, dass F^{-1} stetig ist. Sei $\mathcal{M} := \{w \in V : w = F(z) \text{ und } F'(z) = 0\}$. Mit Satz 34 ist F^{-1} holomorph auf $V \setminus \mathcal{M}$. Die Menge der $z : F'(z) = 0$

hat keinen Häufungspunkt, denn sonst wäre $f'(z)=0$ $\forall z\in U$ (mit dem Identitätssatz). Da M das Bild davon unter f ist, besitzt M auch keinen Häufungspunkt, nämlich $w_0\in M$ ist eine isolierte Singularität von f^{-1}. Da f^{-1} aber stetig und damit beschränkt ist, ist w_0 hebbar. Es folgt, dass f^{-1} auch holomorph ist.

- <u>Lemma</u> (Schwarz, s. Aufgabe 1, Blatt 7). Sei $f: B(0,1)\to B(0,1)$ holomorph und so, dass $f(0)=0$. Dann gelten:

  i) $|f(z)|\le z$

  ii) $|f'(0)|\le 1$.

Beweis: Sei $f(z)=\sum_{n\ge 1} a_n z^n$, $a_0=0$ wegen $f(0)=0$.

Sei $g: B(0,1)\to\mathbb{C}$:

$$g(z)=\begin{cases} f(z)/z & (z\neq 0)\\ f'(z) & (z=0)\end{cases}$$

g ist holomorph auf $B(0,1)$ mit $g(z)=\sum_{n\ge 0} a_{n+1} z^n$, und da $|f(z)|<1$, gilt

$$|g(z)|<\frac{1}{r}\quad \forall z: |z|=r<1$$

Mit dem Maximumprinzip gilt also $|g(z)|<\frac{1}{r}$, $z\in\overline{B(0,r)}$

Der Grenzübergang $r\to 1^-$ liefert dann

$$|g(z)|\le 1 \quad \text{für alle } z\in B(0,1), \text{ nämlich}$$

$$|f(z)|\le |z| \quad \text{und} \quad |g(0)|=|f'(0)|\le 1 \qquad \square$$

- Ist f zusätzlich konform, dann gelten $|f(z)|\le |z|$ und auch $|z|=|f^{-1}(f(z))|\le |f(z)|$ also $|f(z)|=|z|$.

Das heisst, $\exists\, \xi\in\mathbb{C}: |\xi|=1 : f(z)=\xi z$.

- <u>Satz 42</u>: Sei $f: B(0,1) \to B(0,1)$ eine konforme Abbildung. Dann existieren $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| = 1$ und $a \in B(0,1)$, sodass
$$f(z) = \xi \frac{z-a}{\bar{a}z - 1}.$$

<u>Beweis</u>: • $\varphi_{\tilde{a}}(z) := \frac{z - \tilde{a}}{\bar{\tilde{a}}z - 1}$ ist ein konforme Abbildung $B(0,1) \to B(0,1)$, mit der Eigenschaft $\varphi_{\tilde{a}}(0) = \tilde{a}$.

• Sei nun $a := f^{-1}(0)$. Dann ist $f \circ \varphi_a$ eine konforme Abbildung $B(0,1) \to B(0,1)$ mit $f \circ \varphi_a(0) = 0$ sodass $f(\varphi_a(z)) = \xi z$. Da $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$ gilt
$$f(z) = \xi \varphi_a^{-1}(z) = \xi \varphi_a(z)$$
□

- Als letzter Hilfsatz (von Hurwitz). Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n: \Omega \to \mathbb{C}$ eine Folge von in Ω holomorphen Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen f konvergieren, und so, dass f_n keine Nullstelle hat $\forall n$. Dann gilt: Falls f nicht identisch null ist, besitzt f auch keine Nullstelle.

Tatsächlich, Sei $f \not\equiv 0$ und $a \in \Omega$: $f(a) = 0$. Sei $\varepsilon > 0$: $B(a, 2\varepsilon) \subset \Omega$ und $f \restriction B(a, 2\varepsilon)_{\setminus\{a\}}$ besitzt keine Nullstelle. Dann konvergiert f_n'/f_n in $B(a, 2\varepsilon) \setminus \{a\}$ lokal gleichmäßig gegen f'/f, und...
$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a| = \varepsilon} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} dz \longrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a| = \varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 1$$
wobei die zwei Gleichungen aus dem Argumentprinzip folgen. Widerspruch. Also hat f keine Nullstelle. □

Zum Beweis vom Abbildungssatz.

- Zuerst reduzieren wir das Problem zu Elementargebieten $\Omega \subset B(0,1)$, da wir dann mit dem Schwarzschen Lemma ein nützliches Werkzeug besitzen.

Lemma: Sei $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet. Dann $\exists$ ein konform äquivalentes Gebiet Ω' mit
$$\Omega' \subset B(0,1) \text{ und } 0 \in \Omega'.$$

Beweis: Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ und $f : \Omega \to \mathbb{C} : z \mapsto z - z_0$.
Da f analytisch ist und in dem Elementargebiet Ω keine Nullstelle besitzt, $\exists$ $g : \Omega \to \mathbb{C}$, holomorph,
$$g^2(z) = f(z) = z - z_0 \qquad \forall z \in \Omega.$$
Es gilt: $g(z_1) = \pm g(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$.
Insbesondere ist g injektiv und damit eine konforme Abbildung $g : \Omega \to g(\Omega) =: \tilde{\Omega}$, mit $\tilde{\Omega}$ offen und nicht leer. $\exists$ also $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$: $B(a,r) \subset \tilde{\Omega}$ und $0 \notin B(a,r)$. Sei $w \in B(a,r)$. Falls $-w \in$ ~~$B(a,r)$~~ $\tilde{\Omega}$, dann müsste $w = 0$ sein, Widerspruch. Also gilt
$$B(-a,r) \subset \mathbb{C} \setminus \tilde{\Omega}$$
mit $\tilde{\Omega}$ konform äquivalent zu Ω.

- O.E.d.A. nehmen wir also an: $\exists z_0 \in \mathbb{C}, \rho > 0 : B(z_0, \rho) \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$.
Die Abbildung $h : \Omega \to \mathbb{C} : z \mapsto (z - z_0)^{-1}$ ist holomorph und beschränkt: $|h(z)| = |z - z_0|^{-1} < \rho^{-1}$, nämlich: $h(\Omega) \subset B(0, \rho^{-1})$ und Ω und $h(\Omega)$ sind konform äquivalent. Sei $a \in h(\Omega)$. Dann $0 \in h(\Omega) - a$. Schließlich $\exists \sigma > 0$: $\sigma(h(\Omega) - a) \subset B(0,1)$ und $0 \in \sigma(h(\Omega) - a)$ $\square$

- Es genügt also, $\Omega \subset B(0,1)$ zu betrachten.
- <u>Lemma A</u>: Sei $\Omega \subset B(0,1)$ ein Elementargebiet, $0 \in \Omega$. Wenn $\Omega \setminus B(0,1) \neq \emptyset$, dann existiert eine injektive holomorphe Funktion $\psi : \Omega \to B(0,1)$, sodass

  i) $\psi(0) = 0$

  ii) $|\psi'(0)| > 1$.

<u>Bem</u>: Das kann im Fall $\Omega = B(0,1)$ wegen des Schwarzschen Lemmas nicht gelten.

- <u>Beweis</u>: Sei $a \in B(0,1) \setminus \Omega$, und $\varphi_a(z) := \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$. Da φ_a holomorph in $B(0,1)$ ist und $a \notin \Omega$ (sodass φ_a keine Nullstelle in Ω hat), $\exists\, h : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $h(z)^2 = \varphi_a(z)$ und h ist holomorph in Ω. Da φ_a injektiv ist, gilt

$$h(z_1) = h(z_2) \Rightarrow \varphi_a(z_1) = \varphi_a(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2,$$

sodass h injektiv auf Ω ist. Weiter gilt auch, dass

$$\psi(z) := \left(\varphi_{h(0)} \circ h\right)(z) = \frac{h(z) - h(0)}{\overline{h(0)}\, h(z) - 1}$$

Ω injektiv in $B(0,1)$ abbildet, und $\psi(0) = 0$.

Nun: $h(z)^2 = \varphi_a(z) \Rightarrow 2h(0)h'(0) = |a|^2 - 1$

und $|h(0)|^2 = |a|$ sodass $|h(0)| = \sqrt{|a|}$;

Damit erhalten wir

$$|\psi'(0)| = \frac{|h'(0)|}{\left||h(0)|^2 - 1\right|} = \frac{|a|^2 - 1}{2\sqrt{|a|}} \cdot \frac{1}{|a| - 1} = \frac{|a| + 1}{2\sqrt{|a|}} > 1$$

$\square$

- <u>Lemma B</u>: Sei $\Omega \subset B(0,1)$ ein Elementargebiet mit $0 \in \Omega$. Falls es unter allen injektiven holomorphen $F : \Omega \to B(0,1)$ mit $F(0) = 0$ eine mit maximalem $|F'(0)|$, dann ist die Abbildung konform.

<u>Beweis</u>: Wir nehmen an, F ist nicht surjektiv auf $B(0,1)$. Aus Lemma A angewandt auf $\Omega' := F(\Omega)$, $0 \in \Omega'$ da $F(0)=0$, existiert eine injektive holomorphe Funktion $\Psi : F(\Omega) \to B(0,1)$ mit $\Psi(0)=0$ und $|\Psi'(0)| > 1$. Aber:

$$|(\Psi \circ F)'(0)| = |\Psi'(F(0))F'(0)| > |F'(0)|$$

im Widerspruch zur Maximalität von $|F'(0)|$. $\square$

- <u>Bem</u>: Der Beweis ist jetzt zu einem Variationellen Problem reduziert: die Existenz einer $F : \Omega \to B(0,1)$, $F(0)=0$ mit maximalem $|F'(0)|$.
  Das wird über ein <u>Kompaktheits</u>argument gelöst.
  Dass Ω ein Elementargebiet ist, spielt weiter keine Rolle. Es war die Wurzeleigenschaft, die bis hier wichtig war.

- <u>Satz 43</u> (Montel) Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, holomorph in Ω, und gleichmässig beschränkt:

$$\exists C > 0 : \quad |f_n(z)| \leq C \qquad \forall z \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dann existiert eine Teilfolge $\{f_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, welche lokal gleichmässig konvergiert.

<u>Beweis</u>: später.

- <u>Beweis von Satz 41</u> (unter Annahme von Satz 43).

Sei $0 \ni \Omega \in B(0,1)$. Sei $\mathcal{M}$ die nicht leere Menge.

$\mathcal{M} := \{ F : \Omega \to B(0,1) \;;\; F$ ist injektiv und holomorph, und $F(0) = 0 \}$.

und sei $\eta := \sup \{ |f'(0)| : f \in \mathcal{M} \}$ (möglicherweise ∞)

Per Definition vom "sup" existiert eine Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n \in \mathcal{M}$: $|f_n'(0)| \to \eta \quad (n \to \infty)$.

Da $f_n(\Omega) \subset B(0,1)$ folgt aus dem Satz von Montel: $\exists\, F : \Omega \to B(0,1)$, sodass $f_{n_k} \to f$ lokal gleichmäßig.

Wir behaupten: F ist injektiv.

* F ist nicht konstant: $|f'(0)| \geq |f_{n_k}'(0)| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

  Da f_n injektiv sind, gilt $|f_{n_k}'(0)| > 0$, sodass $f'(0) \neq 0$ und f ist nicht konstant. (s. Lemma C)

* Sei $z_0 \in \Omega$. Da f_n injektiv sind haben die Funktionen $z \mapsto f_{n_k}(z) - f_{n_k}(z_0)$ keine Nullstelle in $\Omega \setminus \{z_0\}$ und aus dem Hurwitzschen Satz hat $f(z) - f(z_0)$ weiter keine Nullstelle in $\Omega \setminus \{z_0\}$, nämlich $f(z) \neq f(z_0) \quad \forall z \neq z_0$.

F erfüllt also alle Eigenschaften von Lemma B, ist deswegen konform mit $F(0) = 0$. Es bleibt, F mit $\left(\frac{F'(0)}{|F'(0)|} \right)^{-1} F$ zu ersetzen, um eine konforme Abbildung zu bekommen wie im Satz 4.1.

Eindeutigkeit: Sei $F_1, F_2 : \Omega \to B(0,1)$, konform und beide so, dass $F_i(z_0) = 0$, $F_i'(z_0) > 0$. Dann ist $F := F_1 \circ F_2^{-1}$ eine konforme Abbildung von $B(0,1)$ in sich selbst, mit $F(0) = 0$ und

$$F'(0) = F_1'(F_2^{-1}(0)) \Big/ F_2'(F_2^{-1}(0)) = \frac{F_1'(z_0)}{F_2'(z_0)} > 0.$$

Mit dem Schwarzschen Lemma folgt also $F(z) = \xi(z)$, mit $|\xi| = 1$, also $\xi = 1$, nämlich

$$(F_1 \circ f_2^{-1})(z) = z$$

□

- <u>Lemma C</u>: Sei $f: U \to V$ holomorph und injektiv. Dann gilt $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in U$.

Beweis: Wir nehmen an, $\exists z_0 \in U$, sodass $f'(z_0) = 0$. Da f holomorph ist, gilt $f(z) = w_0 + \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $a_k \neq 0$, mit $w_0 = f(z_0)$ und $k \geq 2$. Sei

$$\varphi(z) = 1 + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{a_k} (z-z_0)^{n-k}$$

Da $\varphi(z_0) = 1$ und φ ist stetig, $\exists r > 0$: $B(z_0, r) \subset U$ und $\varphi \restriction B(z_0, r)$ hat keine Nullstelle. Damit existiert $h: B(z_0, r) \to \mathbb{C}$, holomorph, sodass

$$h(z) := (z-z_0)\, a_k^{1/k} (\varphi(z))^{1/k} \qquad z \in B(z_0, r);$$

Es gilt: i) $h(z_0) = 0$; ii) $h'(z_0) = a_k^{1/k} \neq 0$

iii) $f(z) = w_0 + h(z)^k \quad \forall z \in B(z_0, r)$.

Mit Satz 34 existiert eine lokal inverse Funktion, $\exists \varepsilon, \delta > 0$; $\delta \leq r$.

$$h^{-1}: B(0, \varepsilon) \to B(z_0, \delta)$$

Sei nun $w \in B(w_0, \varepsilon^k) \setminus \{w_0\}$, und $w = w_0 + \zeta$, $0 < |\zeta| < \varepsilon^k$. ζ hat k k-te Wurzeln $\{\zeta_i : 1 \leq i \leq k\}$, für die $\zeta_i \in B(0, \varepsilon)$ gilt. Da h bijektiv ist, sind $z_i := h^{-1}(\zeta_i)$ so, dass $z_i \neq z_j$ $(i \neq j)$, und $z_i \in B(z_0, \delta)$. Es folgt:

$$f(z_i) = w_0 + h(z_i)^k = w_0 + \zeta = w$$

nämlich $\{z_1, \dots, z_k\} \subset f^{-1}(\{w\}) \quad \forall w \in B(w_0, \varepsilon^k) \setminus \{w_0\}$, Widerspruch

□

• **Lemma D**: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $K \subset \Omega$ ein Kompaktum und $C > 0$. Zu jedem $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\Omega, K, C) > 0$ sodass: Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $|f(z)| \leq C \quad \forall z \in \Omega$, dann gilt

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z, z_0 \in K,\ |z - z_0| < \delta$$

Bem: • δ hängt weder von $z_0 \in K$, noch von f ab.

+ Die Menge $\mathcal{B}$ der holomorphen Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $|f(z)| \leq C \quad \forall z \in \Omega$ ist also lokal gleichmäßig gleichgradig stetig.

Beweis: * Sei $K = \overline{B(a,r)}$ so, dass $\overline{B(a,2r)} \subset \Omega$.
Aus der C.I.F gilt für alle $z, z_0 \in K$:

$$|f(z) - f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - a| = 2r} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - z} - \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \right) d\xi \right|$$

$$= \frac{|z - z_0|}{2\pi} \left| \int_{|\xi - a| = 2r} f(\xi) \big/ (\xi - z)(\xi - z_0)\, d\xi \right|$$

$$\leq \frac{|z - z_0|}{2\pi}\, 4\pi r\, \frac{C}{r^2} = \frac{2C}{r} |z - z_0|$$

Sei $\varepsilon > 0$ und

$$0 < \delta < \min \left\{ r, \frac{r\varepsilon}{2C} \right\}$$

Dann ist $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ falls $z, z_0 \in K$ mit $|z - z_0| < \delta$

* Sei nun K beliebig. Für jede $a \in K$, $\exists\, r_a > 0$: $B(a, 2r_a) \subset \Omega$. Aus der offenen Überdeckung $\{B(a, r_a) : a \in K\}$ erhält man eine endliche Überdeckung $K \subset B_{a_1}(r_{a_1}) \cup \ldots B_{a_n}(r_{a_n})$

damit ist $0 < r := \min\{r_i : 1 \le i \le n\}$ so, dass

$$B(a,r) \subset \Omega \quad \forall a \in K.$$

Tatsächlich $\exists\, i : a \in B(a_i, r_{a_i})$, sodass $z \in B(a,r)$ impliziert $|z - a_i| \le |z-a| + |a - a_i| < 2r_{a_i}$, nämlich $z \in B(a_i, 2r_{a_i}) \subset \Omega$.
Sei nun $\rho := \frac{r}{4}$. Aus der offenen Überdeckung $\{B(a,\rho),\ a \in K\}$ erhält man eine endliche $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(\tilde a_i, \rho)$, mit $\overline{B(\tilde a_i, 2\rho)} = \overline{B(\tilde a_i, r/2)} \subset B(\tilde a_i, r) \subset \Omega$. Damit ist das Lemma zum Spezialfall zurückgeführt. $\square$

- Beweis von Satz 43: Sei $\Omega \supset S = \{s_1, s_2, \dots\}$ eine

abzählbare dichte Teilmenge von Ω, z.B. $S = \{z = x+iy \in \Omega : x, y \in \mathbb{Q}\}$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat die Folge $\{f_n(s_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge; wir nennen die dazugehörige Funktionenfolge $\{f_{k,1}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Induktiv wird dann eine Folge von Folgen $\{f_{kj}\}_{k,j\in\mathbb{N}}$ konstruiert, mit

$$f_{kj}(s_i) \text{ konvergiert } \forall\, 1 \le i \le j$$

Damit konvergiert die Diagonalfolge $\{f_{kk}\}_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise für alle $s \in S$.

Sei $K \subset \Omega$ ein Kompaktum, und $\varepsilon > 0$. Sei $\delta > 0$ aus Lemma D. Wegen der Kompaktheit $\exists$ endlich viele $a_1, \dots, a_N \in S \cap K$, sodass $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(a_i, \delta)$. Für jede $z \in K$, $\exists\, a_i : |z - a_i| < \delta$, sodass

$$|f_{kk}(z) - f_{jj}(z)| \le |f_{kk}(z) - f_{kk}(a_i)| + |f_{kk}(a_i) - f_{jj}(a_i)|$$
$$+ |f_{jj}(a_i) - f_{jj}(z)|$$

Der erste und letzte Term sind mit Lemma D $< \varepsilon$;
weiter $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : k, j \geq n_0 \Rightarrow |f_{kk}(a_i) - f_{jj}(a_i)| < \varepsilon$
wobei n_0 für alle der endlich vielen Punkten $\{a_i, 1 \leq i \leq N\}$
gleich gewählt werden kann. D.h. f_{kk} ist lokal gleichmässig
in ganz Ω konvergent. $\square$

Bemerkungen zum Dirichlet-Problem

- Wir haben schon gesehen: falls $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph ist, dann sind $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch.

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad , \Omega \text{ offen}.$$

Umgekehrt (Satz 6): falls Ω einfach zusammenhängend ist und u harmonisch in Ω ist, dann $\exists\, f : \Omega \to \mathbb{C}$, holomorph und so, dass $u = \mathrm{Re}(f)$ in Ω.

- Das Dirichletproblem für die Laplace-Gleichung in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen.

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \quad && \forall x \in \Omega \\ u(x) &= \varphi(x) \quad && \forall x \in \partial\Omega \end{aligned} \qquad (D)$$

wobei $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ und $u \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$

Für den Spezialfall $\Omega = B(z_0, R)$ existiert eine explizite Lösung: Sei $z = r(\cos\theta, \sin\theta)$; $\zeta = R(\cos t, \sin t)$ und

$$P(z, \zeta) := \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - t) + r^2}$$

der Poissonkern. Falls $\varphi \in C^0(\partial B(z_0, R))$, dann ist

$$u(z_0 + z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, Re^{it})\,\varphi(z_0 + Re^{it})\,dt & |z| < R \\ \varphi(z_0 + z) & |z| = R \end{cases}$$

eine Lösung von (D) in $\Omega = B(z_0, R)$.

- Das Dirichletproblem und der Riemannsche Abbildungssatz sind eng verknüpft.

Zuerst: zu jedem Ω Elementargebiet $\exists\, F : \Omega \to B(0,1)$ konform. Es ist eine zusätzliche Frage, ob F sich auf $\overline{\Omega}$ stetig fortsetzen lässt.

Eine positive Antwort erhält man für Jordangebiete, nämlich $\overline{\Omega}$, sodass $\partial\Omega$ eine Jordankurve ist, wobei

$$\partial\Omega = \gamma([0,1])$$

und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2/$oder $\mathbb{C}$ ein Homöomorphismus ist.

- Sei nun $F : \Omega \to \Omega'$ konform und $u' : \Omega' \to \mathbb{R}$ harmonisch (also $\Delta u' = 0$ in Ω'). Dann ist $u := u' \circ F$ auch harmonisch, und zwar:

$$u \text{ ist harmonisch} \iff u' \text{ ist harmonisch}.$$

Sei nämlich $z' \in \Omega'$ und $r' > 0$: $B(z', r') \subset \Omega'$. $\exists$ $f' : B(z', r') \to \mathbb{C}$, holomorph und $u' = \mathrm{Re}(f')$. Sei $f := f'_{\mathrm{dA}} \circ F$. f ist holomorph auf $F^{-1}(B(z', r')) =: U$, und U ist offen; $z_0 := F^{-1}(z')$.

Es folgt: $u = u' \circ F = \mathrm{Re}(f') \circ F = \mathrm{Re}(f)$, sodass u in U harmonisch ist. Da es für eine offene Umgebung von jedem Punkt $z \in \Omega$ ist u harmonisch in Ω

$\leadsto$ Da man für $B(0,1)$ das Dirichletproblem lösen kann, reduziert sich das Dirichletproblem auf Ω auf die Frage der Existenz und Eindeutigkeit einer konformen Abbildung $\Omega \to B(0,1)$!

- Genauer: Sei Ω einfach zusammenhängend, beschränkt und ein Jordangebiet. Dann existiert

$$F : \overline{\Omega} \to \overline{B(0,1)}$$

konform zwischen Ω und $B(0,1)$ und stetig in $\overline{\Omega}$.
Sei $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige reelle Funktion.

Dann ist $\xi : \partial B(0,1) \to \mathbb{R}$,
$\xi := \varphi \circ F^{-1}$

auch $C^0(\partial B(0,1); \mathbb{R})$. Mit dem Poissonkern konstruiert man $v : \overline{B(0,1)} \to \mathbb{R}$: $v \in C^2(B(0,1); \mathbb{R}) \cap C^0(\overline{B(0,1)}; \mathbb{R})$ mit $v \restriction \partial B(0,1) = \xi$:

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, \exp(it))\, \xi(\exp(it))\, dt \quad , \quad P(z, \exp(it)) = \frac{1-|z|^2}{|\exp(it)-z|^2} .$$

Sei nun : $\quad u := v \circ F$. Dann ist $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ und harmonisch in Ω. Weiter ist $u \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ mit $u \restriction \partial\Omega = \varphi$, da für $z \in \partial\Omega$

$$u(z) = v(F(z)) = \xi(F(z)) = \varphi(z)$$

Insbesondere ist u explizit bekannt, falls F explizit bekannt ist, wie z.B. für Polygone ("Schwarz-Christoffel-Transformation")

- Umgekehrt: der Riemannsche Abbildungssatz kann aus der Lösung des Dirichletproblems hergeleitet werden (à la Riemann).

Sei Ω einfach zusammenhängend, beschränkt, und so, dass das Dirichletproblem eine eindeutige Lösung für jede stetige $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ besitzt. Sei $z_0 \in \Omega$ und

$$\varphi_0(z) := \log|z - z_0| \qquad \forall z \in \partial\Omega .$$

Sei nun $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$, die Lösung von (D) mit Randdaten $u_0 \restriction \partial\Omega = \varphi_0$. Da Ω einfach zusammenhängend ist, $\exists f_0 : \Omega \to \mathbb{C}$: $u_0 = \mathrm{Re}(f_0)$ in Ω. Wir definieren jetzt

$$F_0(z) := (z - z_0) \exp(-f_0(z)) \qquad (z \in \Omega)$$

und behaupten: F_0 ist konform : $\Omega \to B(0,1)$.

Tatsächlich: Sei $z \in \Omega$;

$$F_0(z_0) = 0 ; \quad F_0'(z_0) = \exp(-f_0(z_0)) \neq 0 ;$$

und

$$F_0(z) \neq 0 \quad \text{für alle } z \in \Omega \setminus \{z_0\}.$$

Weiter gilt hinsbesondere $|F_0(z)| = |z - z_0| \exp(-u_0(z))$, sodass für alle $\zeta \in \partial\Omega$:

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in \Omega}} |F_0(z)| = \lim |z - z_0| \exp(-u_0(z)) = 1$$

Da F_0 holomorph ist, folgt aus dem Maximumprinzip, dass

$$|F_0(z)| < 1 \qquad \forall z \in \Omega.$$

• F_0 ist injektiv: Sei $w_0 \in \Omega$, und $w := F_0(w_0)$. Sei

$$G(z) := \frac{F_0(z) - w}{1 - \overline{w} F_0(z)} \qquad \text{für } z \in \Omega.$$

Da $|F_0(z)| < 1$, ist auch $|w| < 1$, sodass G in Ω holomorph ist, und $G(\Omega) \subset B(0, 1)$. Sei nun F_{w_0} so wie F_0 mit $z_0 \leadsto w_0$ definiert. Dann ist $F_{w_0}(z) \neq 0$ falls $z \neq w_0$, und $G(w_0) = 0$, $F_{w_0}(w_0) = 0$, $F_{w_0}'(w_0) \neq 0$, sodass $\frac{G}{F_{w_0}}$ holomorph in Ω ist. Für $\zeta \in \partial\Omega$:

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in \Omega}} \left| \frac{G(z)}{F_{w_0}(z)} \right| = \lim |G(z)| = 1$$

$$\text{da } |F_0(z)|, |F_{w_0}(z)| \to 1.$$

Daher gilt $\left| \frac{G(z)}{F_{w_0}(z)} \right| \leq 1 \quad \forall z \in \overline{\Omega}$ mit dem Maximumprinzip.

insbesondere bei $z = z_0$, wo $G(z_0) = -w = -f_0(w_0)$, nämlich

$$|f_0(w_0)| \leq |f_{w_0}(z_0)|$$

Da z_0, w_0 beliebig sind, folgt auch $\geq$ aus dem Tausch $z_0 \leftrightarrow w_0$, und

$$|f_0(w_0)| = |f_{w_0}(z_0)| .$$

Damit ist

$$\frac{|G(z_0)|}{|f_{w_0}(z_0)|} = \frac{|f_0(w_0)|}{|f_{w_0}(z_0)|} = 1$$

und da $w_0 \in \Omega$, folgt $\left|\frac{G(z)}{f_{w_0}(z)}\right| = 1 \quad \forall z \in \overline{\Omega}$.

Da $f_{w_0}(z) \neq 0$ falls $z \neq w_0$, folgt $G(z) \neq 0$ falls $z \neq w_0$, nämlich $f_0(z) \neq f_0(w_0)$ falls $z \neq w_0$

* f_0 ist surjektiv: Sei $\xi \in B(0,1)$. Wir nehmen an, $\xi \notin f_0(\Omega)$. Dann ist

$$\Psi(z) := \frac{1 - \overline{\xi} f_0(z)}{f_0(z) - \xi}$$

eine holomorphe Funktion in Ω, mit $(\xi \in \partial\Omega)$

$$\lim_{\substack{z \to \xi \\ z \in \Omega}} \cancel{} |\Psi(z)| = 1 \qquad (\text{da } |f_0(z)| \to 1)$$

sodass $|\Psi(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \overline{\Omega}$. Aber $\Psi(z_0) = -\frac{1}{\xi}$,

sodass $|\Psi(z_0)| > 1$. Widerspruch

$\square$

Über die Zeta-Funktion

- Die Riemannsche ζ-Funktion:

$$\zeta : \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\} \to \mathbb{C}$$
$$s \mapsto \zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

ist holomorph, da die Summe in jedem $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \geq 1+\delta\}$ gleichmäßig konvergiert.

- Wir haben schon die Theta-Funktion definiert:

$$\Theta : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \Theta(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-\pi n^2 t)$$

für die die Poissonsche Summenformel

$$\Theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\Theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

liefert. Für $t \geq 1$ gilt

$$\sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 t} \leq \sum_{n\geq 1} e^{-\pi n t} \leq Ce^{-\pi t}$$

sodass

$$|\Theta(t) - 1| \leq Ce^{-\pi t} \qquad \forall\, t \geq 1 \qquad (*)$$

Insbesondere ist $\left|\Theta\left(\frac{1}{t}\right)\right|$ beschränkt bei $t \to 0$, sodass

$$\Theta(t) \leq C/\sqrt{t} \qquad (t \to 0) \qquad (**)$$

- Die Gamma-Funktion ist auch in der Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 1$ definiert:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

und hat eine meromorphe Fortsetzung auf

$$\mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}$$

die über die Gleichung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

definiert werden kann.

Dazu gilt:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \qquad t = vu$$

Das folgt aus: $\Gamma(1-z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-z} dt = u \int_0^\infty e^{-vu} (vu)^{-z} dv$

sodass

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \left(t \int_0^\infty e^{-vt} (vt)^{-z} dv \right) dt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \left(e^{-t(v+1)} v^{-z} \right) dv\, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{v^{-z}}{1+v} dv = \dots = \frac{\pi}{\sin \pi(1-z)} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Insbesondere gilt $\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\pi} \sin(\pi z) \Gamma(1-z)$ und die Pole erster Ordnung von $\Gamma(1-z)$ bei $z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ werden durch die Nullstellen erster Ordnung von $\sin(\pi z)$ aufgehoben: also ist

$$z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}$$ eine ganze Funktion, mit Nullstellen bei $z \in -\mathbb{N} \cup \{0\}$

- Lemma: Falls $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{2} \int_0^\infty u^{(s/2-1)} (\theta(u) - 1)\, du.$$

Beweis: Wir stellen zuerst fest, dass

$$\int_0^\infty e^{-\pi n^2 u} u^{s/2-1}\,du = (\pi n^2)^{-s/2} \int_0^\infty e^{-t} t^{s/2-1}\,dt$$

$$u = \frac{t}{\pi n^2} \qquad = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s}$$

Weiter gilt $\frac{\theta(u)-1}{2} = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 u}$, sodass

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty u^{s/2-1}(\theta(u)-1)\,du = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 u} u^{s/2-1}\,du = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

$\square$

- Damit definieren wir die Xi-Funktion auf $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\xi(s) := \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

und

<u>Satz</u>: ξ ist holomorph auf $\mathrm{Re}(s)>1$ und besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ mit Polen erster Ordnung bei $s=0$ und $s=1$. Weiter gilt

$$\xi(s) = \xi(1-s) \qquad \forall s \in \mathbb{C}.$$

<u>Beweis</u>: Sei $\psi(u) = \frac{1}{2}(\theta(u)-1)$. Aus der Funktionalgleichung für θ folgt

$$\psi(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}\psi\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{1}{2}$$

Weiter gilt mit dem Lemma

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_0^\infty u^{s/2-1}\psi(u)\,du = \left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right)(\dots)\,du$$

$$= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty \left(u^{-s/2-1/2} + u^{s/2-1}\right)\psi(u)\,du$$

wobei die Transformation $u \to u^{-1}$ im ersten Integral benutzt wurde, nachdem die Funktionalgleichung eingesetzt wurde:

$$\int_0^1 u^{s/2-1}\psi(u)\,du = \int_1^\infty u^{-\frac{s}{2}+1}\left[u^{1/2}\psi(u)+\tfrac{1}{2}u^{1/2}-\tfrac{1}{2}\right]u^{-2}\,du$$

Zusammenfassend: für $Re(s)>1$ gilt

$$\xi(s) = \frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}+\int_1^\infty \left(u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}+u^{\frac{s}{2}-1}\right)\psi(u)\,du .$$

Das Integral definiert eine ganze Funktion, da $|\psi(u)|<Ce^{-\pi u}$ wegen $(*)$. ξ lässt sich also auf $\mathbb{C}$ fortsetzen, mit zwei Polen erster Ordnung bei $s=0$ und $s=1$. Die Symmetrie $s \leftrightarrow (1-s)$ folgt aus der Gleichung. $\square$

- Als Korollar erhalten wir eine Fortsetzung von ζ von $Re(s)>1$ auf ganz $\mathbb{C}$ mit einem einzigen Pol erster Ordnung bei $s=1$:

$$\zeta(s) = \pi^{s/2}\frac{\xi(s)}{\Gamma(s/2)}$$

$s \mapsto 1/\Gamma(s/2)$ ist nämlich ganz, und die Nullstellen bei $s=0,-2,-4,\dots$ sind erster Ordnung. Der Pol bei $s=0$ wird also aufgehoben und es bleibt eine Singularität bei $s=1$.

- Kurzer Umweg über unendliche Produkte. Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n\in\mathbb{C}$. Falls $\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}(1+a_n)$ konvergiert (und $\neq 0$) schreiben wir $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$.

[Falls $\prod_{n=1}^{N}(1+a_n)\to 0$ $(N\to\infty)$ heisst das Produkt nach 0 divergent.]

Insbesondere gilt: Falls $\sum_{n\geq 1}|a_n|<\infty$, dann konvergiert das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$.

<u>Beweis</u>: $\exists\, n_0$: $|a_n|<1/2$ $\forall n\geq n_0$. ~~O.E.d.A.: $n_0=1$~~.

Dann gilt

$$\prod_{n=n_0}^{N}(1+a_n) = \prod_{n=n_0}^{N}\exp\left(\log(1+a_n)\right) = \exp(B_N)$$

mit $B_N = \sum_{n=n_0}^{N} \log(1+a_n)$.

Für $|a_n| < \frac{1}{2}$ gilt $|\log(1+a_n)| \leq 2|a_n|$ und $\lim_{N\to\infty} B_N =: B$ existiert. Es folgt mit der Stetigkeit von $\exp(\cdot)$, dass $\lim_{N\to\infty} \exp(B_N) = \exp(B) \neq 0$.

Damit
$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N}(1+a_n) = \prod_{n=1}^{n_0}(1+a_n)\exp(B),$$
was die Konvergenz beweist. Da $\exp(B) \neq 0$ ist $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = 0$, gdw $\exists\, \bar{n} < n_0$ mit $1 + a_{\bar{n}} = 0$ $\square$

Wir betrachten weiter $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$, wobei $F_n : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph sind, und

& $|F_n(z) - 1| \leq c_n \quad \forall z \in \Omega$

+ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$.

Das Produkt konvergiert punktweise für jede $z\in\Omega$ (mit $F_n(z) = 1 + a_n(z)$ und $|a_n(z)| \leq c_n$). Die Konvergenz ist sogar gleichmäßig in Ω, sodass $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ eine holomorphe Funktion definiert (Satz).

• <u>Satz</u>: Sei $\mathrm{Re}(s) > 1$. Dann gilt:
$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} (1-p^{-s})^{-1}$$
wobei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen ist.

<u>Beweis</u>: Die Funktionen $s \mapsto (1-p^{-s})^{-1}$ sind holomorph auf $\mathrm{Re}(s) > 1$ für alle $p\in\mathbb{P}$, sodass das Produkt eine holomorphe Funktion definiert. Mit dem Identitätssatz genügt es also, die Gleichung für $s > 1$ zu beweisen.

Nun: $(1-p^{-s})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (p^{-s})^n$

Der Fundamentalsatz der Arithmetik (Primzahlzerlegung) liefert:

$$n = p_1^{k_1} \cdots p_j^{k_j}, \text{ wobei } p_i \leq n \quad 1 \leq i \leq j$$

Es folgt:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leq \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq N}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \dots + \frac{1}{p^{ns}}\right) \leq \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq N}} (1-p^{-s})^{-1}$$

$$\leq \prod_{p \in \mathbb{P}} (1-p^{-s})^{-1}$$

sodass $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \leq \prod_{p \in \mathbb{P}} (1-p^{-s})^{-1}$. Umgekehrt gilt auch

$$\prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq N}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \dots + \frac{1}{p^{ns}}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ und damit}$$

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} (1-p^{-s})^{-1} = \lim_{N \to \infty} \lim_{n \to \infty} \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq N}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \dots + \frac{1}{p^{ns}}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \square$$

- Da $(1-p^{-s})^{-1} \neq 0$ für alle $p \in \mathbb{P}$ folgt auch, dass ζ keine Nullstelle in $\mathrm{Re}(s) > 1$ hat.

<u>Satz</u>: Die einzigen Nullstellen von ζ in $\mathbb{C} \setminus \{s : 0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1\}$ sind $\{z_n = -2n, \ n \in \mathbb{N}\}$.

<u>Beweis</u>: Aus $\xi(s) = \xi(1-s)$ folgt

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{(1-s)}{2}\right) \zeta(1-s),$$

nämlich

$$\zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{(1-s)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \zeta(1-s)$$

Für $\mathrm{Re}(s) < 0$ gelten:

* $\zeta(1-s)$ hat keine Nullstelle, da $\mathrm{Re}(1-s) > 1$
* $\Gamma\left(\frac{(1-s)}{2}\right)$ hat keine Nullstelle
* $\frac{1}{\Gamma(s/2)}$ hat Nullstellen bei $s = -2, -4, -6, \ldots$ $\square$

Insbesondere liegen alle Nullstellen der ζ-Funktion im kritischen Streifen $\{ s \in \mathbb{C} : 0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1 \}$.

Die Riemannsche Vermutung. Die Nullstellen der ζ-Funktion im kritische Streifen befinden sich alle entlang der Linie $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

> "Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indes die Aufsuchung desselben, nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, ..." Riemann, 1859.

* Da ζ ein Pole erster Ordnung bei $s = 1$ hat gilt

$$\infty = \lim_{\substack{s \to 1 \\ \mathrm{Re}(s) > 1}} \zeta(s) = \lim_{\substack{s \to 1 \\ \mathrm{Re}(s) > 1}} \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

so dass $\lim\limits_{\substack{s \to 1 \\ \mathrm{Re}(s) > 1}} \prod\limits_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s}) = 0$. Da $0 < 1 - \frac{1}{p} < 1 - p^{-s}$ für alle $p \in \mathbb{P}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$, gilt

$$0 \leq \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) < \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s}) \qquad (s > 1)$$

und mit dem Limes $s \downarrow 1$:

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 0$$

Falls $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} < \infty$, wäre das Produkt konvergent, und daher $\neq 0$.

Es folgt also:

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty$$

Die Folge $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ der Primzahlen wächst nicht sehr schnell.
Insbesondere ist $p_n < Cn^{1+\varepsilon}$ für jedes $\varepsilon > 0$.
Der Primzahlsatz besagt:

$$p_n \sim n\log n \qquad (n\to\infty)$$

oder anders formuliert. Sei $\pi(x) := \sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\le x}} 1$, die Anzahl der Primzahlen $p\le x$. Dann gilt:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad (x\to\infty)$$

- Bemerkungen zum Beweis von $\lim_{x\to\infty} \pi(x)\frac{\log(x)}{x} = 1$.

Aus dem Eulerschen Produkt, und für $\mathrm{Re}(s)>1$:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\left(\log(\zeta(s))\right)' = \frac{d}{ds}\left(\sum_{p\in\mathbb{P}} \log(1-p^{-s})\right) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{-\frac{d}{ds}\exp(-s\log p)}{1-p^{-s}}$$

$$= \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log(p)}{p^s(1-p^{-s})} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log(p)}{p^s}\sum_{m=0}^{\infty} p^{-sm}$$

$$= \sum_{p\in\mathbb{P}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log(p)}{p^{sm}}\right) =: \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

wobei

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log(p) & \text{falls } n=p^m \text{ mit } p\in\mathbb{P},\ m\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

und weiter definiert man

$$\psi(x) := \sum_{n\le x}\Lambda(n) \qquad (x\ge 0.$$

Nun gilt

$$s\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx = \sum_{n\geq 1} s\int_n^{n+1}(\cdot)\,dx = \sum_{n\geq 1}\psi(n)\, s\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^{s+1}}$$

$$= \sum_{n\geq 1}\underbrace{\psi(n)}_{=\sum_{m\leq n}\Lambda(m)}\left(n^{-s}-(n+1)^{-s}\right) = \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

nämlich

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx \qquad (\lozenge)$$

Unabhängig von dieser Gleichung gilt.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x} = 1 \implies \lim_{x\to\infty}\pi(x)\frac{\log(x)}{x} = 1$$

Beweis: $*$ $\psi(x) \leq \sum_{p\leq x}\frac{\log(x)}{\log(p)}\log(p) = \pi(x)\log(x)$

da $p^m \leq x \implies m \leq \frac{\log(x)}{\log(p)}$

nämlich

$$\frac{\psi(x)}{x} \leq \pi(x)\frac{\log(x)}{x}$$

sodass $\liminf_{x\to\infty}\pi(x)\frac{\log(x)}{x} \geq 1$.

$*$ Sei $0<\alpha<1$. Dann gilt

$$\psi(x) \geq \sum_{p\leq x}\log(p) \geq \sum_{x^\alpha<p\leq x}\log(p) \geq \left(\pi(x)-\pi(x^\alpha)\right)\log x^\alpha$$

sodass

$$\frac{\psi(x)}{x} + \alpha \underbrace{\underbrace{\pi(x^\alpha)}_{\le x^\alpha}\frac{\log(x)}{x}}_{\to 0\ (x\to\infty)\ \text{da}\ \alpha<1} \ge \alpha\,\pi(x)\frac{\log(x)}{x}$$

sodass $\limsup\limits_{x\to\infty} \alpha\,\pi(x)\frac{\log(x)}{x} \le 1 \quad \forall\, 0<\alpha<1$

also gilt

$$1 \le \liminf_{x\to\infty} \pi(x)\frac{\log(x)}{x} \le \limsup_{x\to\infty} \pi(x)\frac{\log(x)}{x} \le 1 \qquad \square$$

Es genügt also $\frac{\psi(x)}{x}\to 1$ $(x\to\infty)$ zu beweisen.

Das folgt aus: i) eine Inversionsformel von (Ω).

$$\int_1^x \psi(u)\,du = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)ds$$

$(c>1)$

ii) $\zeta(s)\neq 0 \quad \forall s:\ \mathrm{Re}(s)=1.$

und $\forall \varepsilon>0$

$$\frac{1}{|\zeta(s)|} \le C_\varepsilon |t|^\varepsilon \qquad (s=\sigma+it,\ |\sigma|\ge 1,\ |t|\ge 1)$$

FIN