Klausur zur Wahrscheinlichkeitstheorie vom 10.10.2011

F. Merkl/R. Graf

Lösungen

Aufgabe 1

(a) Eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von integrierbaren Zufallsvariablen heißt Martingal bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wenn Folgendes gilt:
   (i) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist adaptiert an $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
   (ii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ $\mathbf{P}$-f.s.

(b) Wir berechnen zunächst

$$\mathbf{E}\left[e^{Z_1}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^x e^{-2|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{3x}\,dx + \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = \frac{4}{3}.$$

Damit zeigen wir nun, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist:
   (i) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist offensichtlich adaptiert an $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
   (ii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\mathbf{E}[|X_n|] = \mathbf{E}[X_n] = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\mathbf{E}\left[e^{Z_k}\right]\right) = 1 < \infty,$$

   d.h. X_n ist integrierbar.
   (iii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\mathbf{P}$-f.s.

$$\mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbf{E}\left[X_n \cdot \frac{3}{4}e^{Z_{n+1}}\,\middle|\,\mathcal{F}_n\right] = X_n \cdot \frac{3}{4}\mathbf{E}\left[e^{Z_{n+1}}\right] = X_n.$$

Aufgabe 2

(a) Für zwei σ-endliche Maße μ und ν auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ sind äquivalent:
   (i) Jede μ-Nullmenge ist auch eine ν-Nullmenge.
   (ii) ν besitzt eine Dichte bezüglich μ.

(b) Nach dem Satz von Radon-Nikodym genügt es zu zeigen, dass jede $\tilde{\mathbf{P}}$-Nullmenge auch eine $\mathbf{Q}$-Nullmenge ist. Sei also $B \in \mathcal{F}$ mit $\tilde{\mathbf{P}}[B] = 0$. Dann gilt

$$0 \leq \mathbf{Q}[B] = \mathbf{P}[A \cap B] \leq \mathbf{P}[B] = \tilde{\mathbf{P}}[B] = 0,$$

also $\mathbf{Q}[B] = 0$.

Aufgabe 3

(a) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Weiter sei $\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\mathcal{F}_n\right)$. Dann existiert $X_\infty \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$, so dass X_n für $n \to \infty$ $\mathbf{P}$-f.s. und in $\mathcal{L}^1$ gegen X_∞ konvergiert, und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\mathbf{P}$-f.s.

$$\mathbf{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n] = X_n.$$

(b) Angenommen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist gleichgradig integrierbar. Nach dem Martingalkonvergenzsatz für gleichgradig integrierbare Martingale konvergiert X_n dann für $n \to \infty$ $\mathbf{P}$-f.s. und in $\mathcal{L}^1$ gegen eine Zufallsvariable X_∞, welche

$$\mathbf{E}[X_\infty] = \mathbf{E}[X_0] = 1$$

erfüllt. Aus dem starken Gesetz der großen Zahl folgt jedoch, dass $\mathbf{P}$-f.s.

$$X_n = \exp\left(n\left(\log\frac{3}{4} + \frac{1}{n}S_n\right)\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

gilt, also $X_\infty = 0$ $\mathbf{P}$-f.s. und somit $\mathbf{E}[X_\infty] = 0$. Widerspruch!

Aufgabe 4

(a) Ist $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein $\mathcal{L}^2$-Martingal bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, so gilt für alle $0 \le r \le s \le t$

$$\mathbf{E}[(M_t - M_s)(M_s - M_r)] = 0.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathcal{F}_n := \sigma(G_k, U_k : 1 \le k \le n)$. Dann ist $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein $\mathcal{L}^2$-Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$:

(i) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist offensichtlich adaptiert an $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt nach Konstruktion $|M_{n+1} - M_n| \le 1$, also $|M_n| \le n$. Insbesondere ist $M_n \in \mathcal{L}^2$.

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\mathbf{P}$-f.s.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}\left[M_n + G_{n+1}\,1_{\{M_n \text{ gerade}\}} + U_{n+1}\,1_{\{M_n \text{ ungerade}\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] \\ &= M_n + \underbrace{\mathbf{E}[G_{n+1}]}_{=0}\,1_{\{M_n \text{ gerade}\}} + \underbrace{\mathbf{E}[U_{n+1}]}_{=0}\,1_{\{M_n \text{ ungerade}\}} = M_n.\end{aligned}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt dementsprechend

$$\mathbf{E}[M_n] = \mathbf{E}[M_0] = 0.$$

Zusammen mit dem Lemma über die Orthogonalität der Zuwächse von $\mathcal{L}^2$-Martingalen erhalten wir damit für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbf{Var}[M_n] = \mathbf{E}[M_n^2] = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}[\underbrace{(M_k - M_{k-1})^2}_{\le 1}] \le n.$$