LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Peter Otte
Tom Bachmann, Sebastian Gottwald

Wintersemester 2013/14
14.03.2014

Analysis für Informatiker und Statistiker

Nachklausur

Lösungsvorschlag

Name: ....

Pseudonym

Aufgabe 1. [20 Punkte]

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ seien

$$f(x) := \frac{1}{2}\big(e^x + e^{-x}\big) \quad , \qquad g(x) := \frac{1}{2}\big(e^x - e^{-x}\big)\,.$$

Zeigen Sie:

(*a*) $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. [2 Punkte]

Beweis. Ausmultiplizieren zeigt, dass nur die gemischten Terme überleben, welche wegen $e^x e^{-x} = 1$ addiert den Wert 1 ergeben. □

(*b*) $f'(x) = g(x)$ und $g'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. [2 Punkte]

Beweis. Ableiten von f und g ändert wegen der Kettenregel jeweils nur das Vorzeichen des zweiten Summands, also $f'(x) = (e^x - e^{-x})/2 = g(x)$, sowie $g'(x) = (e^x + e^{-x})/2 = f(x)$. □

(*c*) Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $g(x) > 0$ für alle $x > 0$. [2 Punkte]

Beweis. Da $e^{\pm x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x > 0$ ist $e^{-x} < 1 < e^x$ (denn exp ist streng monoton steigend, $1/\exp$ streng monoton fallend), also $g(x) > 0$. □

(*d*) Die Funktion g besitzt eine Umkehrabbildung, $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. [3 Punkte]

Beweis. Wegen $g' = f > 0$ ist g streng monoton steigend und somit injektiv. Wegen $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\lim_{x\to\infty} e^x = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ und der Stetigkeit von g ($e^{\pm x}$ ist stetig), ist $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ und g somit auch surjektiv. □

(*e*) Es gilt $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. [3 Punkte; Sie dürfen annehmen, dass g^{-1} stetig differenzierbar ist.]

Beweis. Mit dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion gilt

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{f(g^{-1}(x))}$$

Wegen $f(g^{-1}(x)) \overset{(a)}{=} \pm\sqrt{g(g^{-1}(x))^2 + 1} = \pm\sqrt{x^2+1}$ und der Tatsache, dass g streng monoton steigt und darum seine Umkehrfunktion ebenfalls (Satz 1.51), d.h. $(g^{-1})' > 0$ (Satz 4.17), folgt die Aussage. □

(*f*) Angenommen $h_1, h_2, : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind differenzierbare Funktionen mit $h_1'(x) = h_2'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ und $h_1(a) = h_2(a)$ für ein $a \in \mathbb{R}$, dann gilt $h_1 = h_2$. [4 Punkte]

Beweis. Setzen wir $H := h_1 - h_2$, dann gilt $H'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit ist H (nach Satz 4.17) konstant. Es folgt $H(x) = H(a) = h_1(a) - h_2(a) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, also $h_1 = h_2$. □

(*g*) Es gilt $g^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ für alle $x \in \mathbb{R}$. [4 Punkte]

Beweis. Wir benutzen (*f*) und berechnen zunächst die Ableitung der rechten Seite:

$$\frac{d}{dx}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Da außerdem $g(0) = 0 = \ln(1) = \ln(0+\sqrt{0^2+1})$ folgt die Aussage aus (*f*).

□

Name: ....

Aufgabe 2. [20 Punkte]

(a) Berechnen Sie $\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x$ für $n \in \mathbb{N}$ und finden Sie zwei Funktionen $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ (mit Beweis). [2 Punkte]

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt $\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$. Wählen wir nun $f(x) = x = g(x)$, so ergibt sich $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$ und $\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$. □

(b) Zeigen Sie, dass

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}.$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$. [4 Punkte]

Beweis. Unter Benutzung des Additionstheorems $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ mit $a = x$ und $y = \pm b$ folgt

$$\cos(a-b) + \cos(a+b) = 2\cos(a)\cos(b)$$

denn $\sin(-b) = -\sin(b)$, $\cos(-b) = \cos(b)$.

Alternativ: Wegen $e^{ib} + e^{-ib} = 2\cos(b)$ und

$$\cos(a-b) + \cos(a+b) = \mathrm{Re}\left(e^{i(a-b)} + e^{(a+b)}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{ia}(e^{-ib} + e^{ib})\right) = 2\cos(b)\,\mathrm{Re}\left(e^{ia}\right)$$

folgt die Aussage aus $e^{ia} = \cos(a) + i\sin(a)$. □

(c) Beweisen Sie, dass

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x \;=\; \delta_{mn} \;:=\; \begin{cases} 1 & , n = m \\ 0 & , n \neq m \end{cases}$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$. [6 Punkte]

Beweis. Aus (b) folgt $2\cos(nx)\cos(mx) = \cos((n{-}m)x) + \cos((n{+}m)x)$. Aus dem Haupsatz folgt $\int_0^\pi \cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha\pi)$ für jedes $\alpha > 0$ und somit

$$\int_0^\pi \cos((n{+}m)x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n{+}m}\sin((n{+}m)\pi) = 0\,,$$

sowie

$$\int_0^\pi \cos((n{-}m)x)\,\mathrm{d}x \;=\; \begin{cases} \pi & , n = m \\ 0 & , n \neq m \end{cases} ,$$

wobei wir benutzt haben, dass $\sin(k\pi) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(0) = 1$ und $\int_0^\pi dx = \pi$. □

(d) Sei nun $f(x) := \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx)$ für $N \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x \qquad \forall\, m \in \{1, \ldots, N\}.$$

[4 Punkte; Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\int_a^b \sum_{n=1}^N f_n(x)dx = \sum_{n=1}^N \int_a^b f_n(x)dx$, falls $a < b$ und $f_1, \ldots, f_N$ integrierbare Funktionen auf $[a,b]$ sind.]

Beweis. Aus der Linearität des Integrals und (c) folgt

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^N a_n \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^N a_n\delta_{mn} = a_m$$

wobei die letzte Gleichung direkt aus der Definition von δ_{mn} folgt und aus der Tatsache, dass genau ein Term in der Summe dem Fall $n = m$ entspricht (denn $1 \leqslant m \leqslant N$). $\square$

(e) Sei nun $g(x) := \sum_{n=1}^N b_n \cos(nx)$, für $b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)g(x)\,dx \;=\; \sum_{n=1}^N a_n b_n$$

wobei f die Funktion aus Teilaufgabe (d) ist. [4 Punkte]

Beweis. Aus der Linearität und Teilaufgabe (d) folgt

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)f(x)\,dx = \sum_{n=1}^N a_n\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(nx)f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(d)}{=} \sum_{n=1}^N a_n^2$$

Alternativ: Aus Teilaufgabe (c) folgt

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)^2\,dx = \sum_{n=1}^N\sum_{m=1}^N a_n a_m \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x \overset{(c)}{=} \sum_{n=1}^N a_n \sum_{m=1}^N a_m\delta_{mn} = \sum_{n=1}^N a_n^2$$

$\square$

Name: ....

Aufgabe 3. [20 Punkte]

Im Folgenden bezeichne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stets eine Folge reeller Zahlen. Sei B die Menge aller beschränkten, reellen Folgen, d.h.

$$B := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \exists C > 0 \text{ mit } |a_n| \leqslant C \;\forall n \in \mathbb{N} \right\} ,$$

und $N := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} |\, \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$ die Menge aller Nullfolgen. Weiter sei

$$l_1 := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \right\} , \quad l_2 := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\} .$$

Begründen Sie unter Verwendung der aus der Vorlesung bekannten Aussagen über konvergente Folgen und Reihen:

(*a*) $N \subset B$ [2 Punkte]

Beweis. Da konvergente Folgen beschränkt sind, sind dies insbesondere auch Nullfolgen, d.h. aus $(a_n)_n \in N$ folgt $(a_n)_n \in B$ und damit $N \subset B$. □

(*b*) $N \neq B$ [2 Punkte]

Beweis. Die Mengen stimmen nicht überein, da es beschränkte Folgen gibt, die nicht gegen 0 konvergieren, z.B. alle konstanten Folgen, oder auch beschränkte Folgen ohne Grenzwert, wie z.B. $a_n = (-1)^n$. □

(*c*) $l_1 \subset N$ und $l_2 \subset N$ [5 Punkte]

Beweis. Ist $(a_n)_n \in l_1$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (absolut). Aus der Vorlesung wissen wir, dass ein notwendiges Kriterium hierfür ist, dass $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist, also $l_1 \subset N$. Genauso ist $(a_n^2)_n$ eine Nullfolge, falls $(a_n)_n \in l_2$. Da $\sqrt{\cdot}$ stetig ist, folgt $\lim_n |a_n| = \sqrt{\lim_n a_n^2} = 0$, d.h. $(a_n)_n \in N$ und deshalb auch $l_2 \subset N$. □

(*d*) $l_1 \subset B$ und $l_2 \subset B$ [2 Punkte]

Beweis. Die Aussagen folgen direkt aus (*a*) und (*c*): $l_1, l_2 \subset N \subset B$. □

(*e*) $l_1 \subset l_2$ [5 Punkte; beachten Sie, dass im Allgemeinen $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \neq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right)^2$.]

Beweis. Sei $(a_n)_n \in l_1$. Wir wollen zeigen, dass dann auch $(a_n)_n \in l_2$, d.h. dass $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ konvergiert. Wegen $l_1 \subset B$ ist $(a_n)_n$ beschränkt, d.h. es gibt $C > 0$ mit $|a_n| \leqslant C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt für $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{N} |a_n||a_n| \leqslant C \sum_{n=1}^{N} |a_n| \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$$

Somit ist die Folge der Partialsummen $(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2)_N$ beschränkt und somit konvergent, da monoton steigend (positive Summanden). Also $(a_n)_n \in l_2$ und insgesamt $l_1 \subset l_2$. □

(*f*) $l_1 \neq l_2$ [4 Punkte]

Beweis. Als Beispiel dient $a_n = \frac{1}{n}$, denn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ existiert (wurde in der Vorlesung gezeigt), aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert (harmonische Reihe), d.h. $(a_n)_n \in l_2$, aber $(a_n)_n \notin l_1$. □

Name: ....

Aufgabe 4. [20 Punkte]

Für $N \in \mathbb{N}$ sei $f_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_N(x) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \pm \frac{x^{2N+1}}{2N+1}.$$

(*a*) Zeigen Sie, dass

$$f_N'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\left(-x^2\right)^{N+1}}{1+x^2}.$$

[5 Punkte; Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\sum_{k=0}^{N} u^k = \frac{1-u^{N+1}}{1-u}$ für $u \neq 1$.]

Beweis. Wir benutzen die Ableitungsregeln für endliche Summen, Produkte und Potenzen und berechnen

$$f_N'(x) = \left[\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]' = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{N} u^k,$$

wobei $u = -x^2 \neq 1$. Dann folgt $f_N'(x) = \frac{1-u^{N+1}}{1-u} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-x^2)^{N+1}}{1+x^2}$ aus der Formel für endliche geometrische Reihen. □

(*b*) Beweisen Sie, dass $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. [3 Punkte; Hierbei ist $\arctan'(x)$ die Ableitung der Umkehrfunktion von $\tan x$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$, und dass $\arctan(x)$ differenzierbar ist.]

Beweis. Es gilt $x = \tan(\arctan(x))$ und somit (Ableiten beider Seiten)

$$x' = 1 = \tan'(\arctan(x)) \cdot \arctan'(x) = (1+\tan(\arctan(x))^2) \cdot \arctan'(x) = (1+x^2) \cdot \arctan'(x).$$

Das gewünschte Ergebnis folgt, da $1 + x^2 \neq 0$. □

(*c*) Zeigen Sie (unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung), dass

$$f_N(x) - f_N(0) = \arctan x - \int_0^x \frac{\left(-t^2\right)^{N+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

für alle $x \geqslant 0$. [5 Punkte]

Beweis. Nach Hauptsatz gilt $f_N(x) - f_N(0) = \int_0^x f_N'(t)\,\mathrm{d}t$. Unter Verwendung von (a), (b), Hauptsatz und Linearität des Integrals erhalten wir

$$\begin{aligned} f_N(x) - f_N(0) &= \int_0^x f_N'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^x \frac{\left(-t^2\right)^{N+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \arctan(x) - \arctan(0) - \int_0^x \frac{\left(-t^2\right)^{N+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Das gewünschte Ergebnis folgt, da $\tan(0) = 0$ und somit $\arctan(0) = 0$. □

(*d*) Sei von nun an $0 \leqslant x \leqslant 1$. Beweisen Sie, dass

$$\left|\int_0^x \frac{(-t^2)^{N+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 t^{2(N+1)}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2N+3}.$$

Schlussfolgern Sie, dass

$$\arctan x = \lim_{N\to\infty} f_N(x).$$

für $0 \leqslant x \leqslant 1$. [7 Punkte]

Beweis. Aus der Dreiecksungleichung für das Integral folgt

$$I(x) := \left|\int_0^x \frac{(-t^2)^{N+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x \left|\frac{(-t^2)^{N+1)}}{1+t^2}\right|\,\mathrm{d}t.$$

Nun gilt $\left|\frac{\left(-t^2\right)^{N+1}}{1+t^2}\right| = \frac{t^{2(N+1)}}{1+t^2} \leq t^{2(N+1)}$, und somit $I(x) \leq \int_0^x t^{2(N+1)}\,\mathrm{d}t$. Aus der Gebietsadditivität folgt $\int_0^1 t^{2(N+1)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x t^{2(N+1)}\,\mathrm{d}t + \int_x^1 t^{2(N+1)}\,\mathrm{d}t$. Da $t^{2(N+1)} \geq 0$ gilt $\int_x^1 t^{2(N+1)}\,\mathrm{d}t \geq 0$ aufgrund der Monotonie des Integrals, und wir schließen $I(x) \leq \int_0^1 t^{2(N+1)}\,\mathrm{d}t$. Das ist die gewünschte Ungleichung.
Da $\frac{t^{2N+3}}{2N+3}$ Stammfunktion von $t^{2(N+1)}$ ist folgt aus dem Hauptsatz, dass

$$\int_0^1 t^{2(N+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2N+3} - \frac{0}{2N+3},$$

was den ersten Teil der Aufgabe abschließt. Für die Schlussfolgerung berechnen wir nun

$$\begin{aligned}
|f_N(x) - \arctan(x)| &\overset{f_N(0)=0}{=} |f_N(x) - f_N(0) - \arctan(x)| \\
&\overset{(c)}{=} \left|\arctan(x) - \int_0^x \frac{\left(-t^2\right)^{N+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \arctan x\right| \\
&= \left|\int_0^x \frac{\left(-t^2\right)^{N+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\overset{(d)}{\leq} \left|\frac{1}{2N+3}\right|.
\end{aligned}$$

Bei der letzten Abschätzung handelt es sich um eine Nullfolge, und daher folgt $\lim_N f_N(x) = \arctan(x)$. □