Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Peter Otte

WiSe 2013/14
24.12.2013

Übungen zur Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

für Zwischen den Jahren

Zum Begriff 'Probeklausur': *Die Klausur wird sich inhaltlich (da noch nicht alle Themen in der Vorlesung behandelt wurden) und vom Umfang deutlich von diesem Aufgabenblatt unterscheiden. Genauer gesagt, wird die Klausur aus weniger, sowie inhaltlich klar abgegrenzten Aufgaben bestehen, sodass sie jeweils genau wissen, was zu zeigen ist und welche Voraussetzungen Sie annehmen dürfen.*

Folgende Aufgaben entsprechen also qualitativ aber nicht quantitativ möglichen Fragestellungen in der Klausur. Die Bearbeitung dieser Aufgaben soll Ihnen einerseits eine Orientierung dafür geben, wie der Schwierigkeitsgrad der Klausur einzuschätzen ist. Andererseits ist es eine gute Möglichkeit, die freie Zeit zu nutzen, um den bisherigen Vorlesungsstoff zu wiederholen. Sie werden feststellen, dass vor Allem das Verständnis von grundlegenden Konzepten der Analysis, sowie geringfügige Rechenfertigkeiten gefordert sind. Sie dürfen dabei alle in der Vorlesung bewiesenen Aussagen verwenden, wenn Sie diese korrekt zitieren. Alle anderen Behauptungen sind zu beweisen.

Lösungsvorschlag

1. Seien A und B Aussagen. Entscheiden Sie mithilfe einer Wahrheitstafel ob die Aussage

$$\Big(\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)\Big) \Leftrightarrow A$$

eine Tautologie ist. [2 Punkte]

Beweis.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$B \wedge \neg B$	$\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)\big)$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

Ein Vergleich der ersten und letzten Spalte zeigt, dass die angegebene Aussage immer wahr ist. Es handelt sich also um eine Tautologie. □

2. Sei X eine Menge und A, B Teilmengen von X. Zeigen Sie:

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = A$$

Kommmen Sie dabei mit drei Implikationen aus. [4 Punkte]

Beweis. Wir erinnern zunächst daran, dass für beliebige Aussagen X, Y und Z, die Aussagen $X \Leftrightarrow Y \Leftrightarrow Z$ und $(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow Z) \wedge (Z \Rightarrow X)$ äquivalent sind. Wir wenden diese Beobachtung an, mit $X = (A \cap B = A)$, $Y = (A \cup B = B)$ und $Z = (A \subset B)$.

$(A \cap B = A) \Rightarrow (A \cup B = B)$: Da $A = A \cap B$ gilt $A \cup B = (A \cap B) \cup B$. Offenbar gilt $A \cap B \subset B$, und somit $A \cup B = (A \cap B) \cup B \subset B \cup B = B$. Die Umkehrung $B \subset A \cup B$ ist offensichtlich. Folglich gilt $A \cup B = B$.

$(A\cup B=B)\Rightarrow(A\subset B)$: Offenbar gilt $A\subset A\cup B$, und da $A\cup B=B$, gilt also $A\subset B$.

$(A\subset B)\Rightarrow(A\cap B=A)$. Offenbar gilt $A\cap B\subset A$. Sei umgekehrt $x\in A$. Dann $x\in B$ (da $A\subset B$) und somit $x\in A\cap B$. Also $A\subset A\cap B$. Folglich gilt $A=A\cap B$. □

3. Schreiben Sie die Menge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0\}))$ in aufzählender Notation (d.h. $\{\dots\}$). [2 Punkte]

Lösung. Wir haben $\mathcal{P}(\{0\})=\{\emptyset,\{0\}\}$ und somit

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0\}))=\mathcal{P}(\{\emptyset,\{0\}\})=\big\{\emptyset,\{\{0\}\},\{\emptyset\},\{\emptyset,\{0\}\}\big\}.$$ □

4. Beweisen Sie: $\sup\left\{\frac{n^4}{4^n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}=\frac{81}{64}$. [3 Punkte]

Beweis. Wir schreiben $a_n=\frac{n^4}{4^n}$ und $s=\sup\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$ (wobei möglicherweise $s=\infty$). Wir haben $\frac{81}{64}=\frac{9\cdot 9}{8\cdot 8}=\frac{3^4}{4^3}=a_3$ und somit $\frac{81}{64}\leq s$. Um den Beweis abzuschließen ist es hinreichend, dass $a_n\leq a_3$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Offenbar gilt $a_1=\frac{1}{4}<a_3$ und $a_2=\frac{2^4}{4^2}=1<a_3$. Es genügt nun zu zeigen, dass $(a_n)_n$ ab $n=3$ monoton fällt, d.h. dass $a_{n+1}\leqslant a_n$ für alle $n\geqslant 3$. Zunächst haben wir

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^4}{4^{n+1}}\frac{4^n}{n^4}=\frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4.$$

Wenn $n\geqslant 3$ gilt $1+\frac{1}{n}\leqslant\frac{4}{3}$ und somit $(1+\frac{1}{n})^2\leqslant\frac{4^2}{3^2}=\frac{16}{9}<2$. Folglich gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4<\frac{2^2}{4}=1,$$

d.h. $a_{n+1}<a_n$ für alle $n\leqslant 3$, d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist (streng) monoton fallend ab $n=3$. Wegen $a_1,a_2<a_3$ folgt also $a_n\leqslant a_3$ für alle $n\in\mathbb{N}$. □

5. Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen und $n\in\mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $\sum_{k=1}^n a_kb_k\leqslant\frac{1}{2}\big(\sum_{k=1}^n a_k^2+\sum_{k=1}^n b_k^2\big)$ [3 Punkte; *Tipp:* Zweite binomische Formel]

Beweis. Zunächst sei daran erinnert, dass für $x\in\mathbb{R}$ die Ungleichung $x^2\geq 0$ gilt. Angewandt auf $x=a_k-b_k$ erhalten wir $a_k^2-2a_kb_k+b_k^2\geq 0$, und somit $a_kb_k\leq\frac{1}{2}\left(a_k^2+b_k^2\right)$. Die zu zeigende Ungleichung folgt durch Summierung über k von 1 bis n. □

(b) *Nehmen wir an, dass $a_k\neq 0\neq b_k$ für mindestens ein $k\in\{1,\dots,n\}$ und definieren*

$$\alpha_k:=\frac{|a_k|}{\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2}}\,,\ \beta_k:=\frac{|b_k|}{\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{1/2}}\qquad\forall k\leqslant n,\tag{$*$}$$

dann gilt $\sum_{k=1}^n\alpha_k^2=1=\sum_{k=1}^n\beta_k^2$. [2 Punkte]

Beweis. Wir schreiben $A=\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2}$. Außerdem sei daran erinnert, dass für alle $x\in\mathbb{R}$, $|x|^2=x^2$. Dann haben wir

$$\sum_{k=1}^n\alpha_k^2=\sum_{k=1}^n\left(\frac{|a_k|}{A}\right)^2=\frac{1}{A^2}\sum_{k=1}^n a_k^2=\frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2}=1.$$

Der Beweis für (β_k) ist analog. □

(*c*) *Seien nun* α_k *und* β_k *wie in* $(*)$ *durch* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *für* $k \leqslant n$ *definiert, dann folgt* $\sum_{k=1}^n \alpha_k\beta_k \leqslant 1$. [1 Punkt]

Beweis. Wir haben

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k\beta_k \overset{(a)}{\leq} \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^n \beta_k^2\right) \overset{(b)}{=} \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

denn die Ungleichung in (a) gilt für beliebige reelle Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, also auch für $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$. □

(*d*) *Wir schließen* $\sum_{k=1}^n a_kb_k \leqslant \big(\sum_{k=1}^n a_k^2\big)^{1/2}\big(\sum_{k=1}^n b_k^2\big)^{1/2}$. [2 Punkte]

Beweis. Wir schreiben $A = \big(\sum_{k=1}^n a_k^2\big)^{1/2}$ und $B = \big(\sum_{k=1}^n b_k^2\big)^{1/2}$, d.h. $|a_k| = A\alpha_k$ und $|b_k| = B\beta_k$, wobei α_k und β_k wie in $(*)$ definiert sind. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^n a_kb_k \leqslant \sum_{k=1}^n |a_k|\,|b_k| = \sum_{k=1}^n A\alpha_k B\beta_k = AB\sum_{k=1}^n \alpha_k\beta_k \overset{(c)}{\leq} AB = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{1/2}$$

und das ist die zu zeigende Ungleichung. □

6. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

[4 Punkte; *Tipp:* Induktion]

Beweis. Wir schreiben $a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ und $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ und verwenden vollständige Induktion um zu zeigen, dass $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $a_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = b_1$.

Induktionsschritt (1. Variante)
Zunächst haben wir $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)}$. Außerdem gilt

$$b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} \overset{l:=k+1}{=} \sum_{l=2}^{n+2} \frac{1}{n+l} \tag{$**$}$$

und somit $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+n+1} + \frac{1}{n+n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} = a_{n+1} - a_n$. Nehmen wir nun an, dass $a_n = b_n$. Dann gilt $a_{n+1} = a_n + (a_{n+1} - a_n) = b_n + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1}$.

Induktionsschritt (2. Variante - zu Fuß)
Wir setzen $n+1$ für n in die linke Seite der Gleichung ein, d.h. wir berechnen a_{n+1} mithilfe der Induktionsannahme $a_n = b_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}}_{=a_n \overset{\text{I.A.}}{=} b_n} + \frac{(-1)^{2n+1-1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2-1}}{2n+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{2n+2} \overset{(**)}{=} b_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = b_{n+1}
\end{aligned}$$ □

7. Beweisen oder widerlegen Sie: *Sind* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen mit Häufungspunkten* a *und* b*, dann ist* $a+b$ *ein Häufungspunkt der Folge* $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. [3 Punkte]

Beweis. Falsch. Sei $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^{n+1}$. Dann gelten $a_{2n} = 1$ und $b_{2n+1} = 1$, und somit ist 1 Häufungspunkt von $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$. Andererseits gilt $a_n + b_n = 0$, und diese Folge hat 2 nicht als Häufungspunkt. □

8. Zeigen Sie: *Ist die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent, so ist* $(a_{n+1}-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge.* Warum ist die Umkehrung dieser Aussage im Allgemeinen falsch? [5 Punkte]

Beweis. Wir erinnern an den folgenden Grenzwertsatz: *Sind* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folgen, mit* $\lim_n a_n = a$ *und* $\lim_n b_n = b$*, dann ist die folge* $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent, mit Grenzwert* $b-a$. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in der Aufgabe, und $b_n := a_{n+1}$. Dann ist offenbar $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, mit selbem Grenzwert wie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aus dem Grenzwertsatz schließen wir

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Die Umkehrung ist falsch. Sei $a_n = \frac{1}{n}$ und $s_n = \sum_{k=1}^n a_n$. Es wurde in der Vorlesung bewiesen, dass s_n nicht konvergent ist. Allerdings gilt $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \to 0$ (wobei der letzte Schritt wiederum in der Vorlesung bewiesen wurde). □

9. Beweisen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$, d.h. x^n *konvergiert schneller gegen* 0*, als* $\frac{1}{n}$.
[5 Punkte; *Tipp:* Benutzen Sie den binomischen Satz, d.h. $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$, um $(1+h)^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2} h^2$ für alle $h > 0$ und $n \geqslant 2$ zu zeigen.]

Beweis. Nach dem binomischen Satz gilt $(1+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k \geqslant \binom{n}{2} h^2 = \frac{n(n-1)}{2} h^2$, wenn $h \geqslant 0$ und $n \geqslant 2$. Im Fall $x = 0$ ist nichts zu zeigen. Für $0<|x|<1$ ist $h := \frac{1}{|x|} - 1 > 0$. Für $n \geqslant 2$ folgt

$$0 < |nx^n| = n|x|^n = \frac{n}{(1+h)^n} \leqslant \frac{2}{(n-1)h^2}$$

Da die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, folgt nach dem Einschachtelungsprinzip $\lim_n nx_n = 0$. □

10. (*a*) Sei $q \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie mithilfe von vollständiger Induktion [3 Punkte]

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Beweis. Offenbar gilt $\sum_{k=0}^0 q^k = 1 = \frac{1-q}{1-q}$, was die Formel für $n = 0$ beweist. Nehmen wir nun an, dass $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \overset{\text{I.A.}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}\end{aligned}$$

Das ist die zu zeigende Formel für $n+1$. □

(b) Folgern Sie für $|q| < 1$, dass $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = (1-q)^{-1}$. [3 Punkte]

Beweis. Sei $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. Dann gilt nach Teil (a), dass $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - q^{n+1}\frac{1}{1-q}$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\lim_n q^n = 0$ für $|q| < 1$. Somit gilt, durch mehrfache Anwendung der Grenzwertsätze, dass

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-q} - q^n \frac{q}{1-q}\right) = \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Bemerkung: Im letzen Schritt haben wir die Konvergenz konstanter Folgen und die Grenzwertsätze verwendet, ohne diese im Detail zu zitieren. Das erscheint ihrer Wichtigkeit im Argument und der Position in der Aufgabe angemessen. Die Verwendung der Grenzwertsätze ohne es zu erwähnen, würde allerdings zu Punktabzug führen. In der Klausur müssen Sie selbst entscheiden, ab welchem Punkt sie Sätze unvollständig zitieren. Ein vollständiges Zitat kann nie schaden. □

(c) Berechnen Sie $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2+3i}\right)^k$. [2 Punkte]

Beweis. Wir setzen $q = \frac{2}{2+3i}$. Wir haben $|q|^2 = \frac{2^2}{|2+3i|^2} = \frac{2^2}{2^2+3^2} < 1$ und somit $|q| < 1$. Folglich konvergiert die Reihe nach (b) gegen $\frac{1}{1-q} = \frac{2+3i}{2+3i-2} = \frac{2+3i}{3i} = 1 - \frac{2}{3}i$. □

11. (a) Definieren Sie den Begriff *Cauchy-Folge.* [1 Punkt]

Lösung. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt *Cauchy-Folge*, wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n > N$, gilt $|a_n - a_m| < \epsilon$. □

(b) Seien $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen, und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$s_n := b_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{k^2}\,.$$

Zeigen Sie, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. [6 Punkte]

Beweis. Wir erinnern an die folgende Sätze aus der Vorlesung: *(1) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. (2) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen, so ist auch $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. (3) Konvergente Folgen sind beschränkt. (4) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent.*
Nach Satz (2) ist es hinreichend zu zeigen, dass die Folge $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, wobei $s'_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{k^2}$, und nach Satz (1) ist es hinreichend zu zeigen, dass die Folge eine Cauchy-Folge ist. Da die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, ist sie nach Satz (3) insbesondere beschränkt, d.h. es gibt $C > 0$, sodass $|c_n| \leqslant C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Wir zeigen, dass $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Sei dafür $\epsilon > 0$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent ist, ist diese Reihe eine Cauchy-Folge, d.h. es gibt ein N, sodass für $n > m > N$,

$$\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{\epsilon}{C}.$$

Dann gilt für $n > m > N$, dass

$$|s'_n - s'_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{c_k}{k^2}\right| \overset{\Delta}{\leq} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|c_k|}{k^2} \leq C \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} < C\frac{\epsilon}{C} = \epsilon.$$

Die Folge $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist somit eine Cauchy-Folge und der Beweis ist abgeschlossen. (Im mit Δ markierten Schritt haben wir die Dreiecksungleichung $n-m$ mal angewandt.) □

12. Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+2k}{k^2(k+1)^2}$. [5 Punkte; *Tipp:* Was ist $(\Delta b)_k := b_k - b_{k-1}$ für $b_k := \frac{1}{(k+1)^2}$?]

Lösung. Wegen $b_k - b_{k-1} = \frac{k^2-(k+1)^2}{k^2(k+1)^2} = -\frac{1+2k}{k^2(k+1)^2}$ und $\sum_{k=1}^{n} (\Delta b)_k = b_n - b_0$ folgt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1+2k}{k^2(k+1)^2} = b_0 - b_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

und darum $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+2k}{k^2(k+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1$. □

13. Zeigen Sie die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, wobei $a_n := n^{-1}\sqrt{n + \frac{1}{n}}$. [5 Punkte]

Beweis. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine reelle Folge positiver Zahlen. Um das Leibniz-Kriterium anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Zunächst gilt

$$0 \leqslant \frac{\sqrt{n+\frac{1}{n}}}{n} \leqslant \frac{\sqrt{n+1}}{n} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

Da die Wurzelfunktion $\sqrt{\cdot} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig ist, konvergiert die rechte Seite gegen 0. Nach dem Einschachtelungsprinzip ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also eine Nullfolge.

Monotonie – Variante 1: Es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1+\frac{1}{n+1}}}{n+1} \frac{n}{\sqrt{n+\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{(n+1+\frac{1}{n+1})n^2}{(n+1)^2(n+\frac{1}{n})}} \leqslant \sqrt{\frac{(n+1+1)n^2}{(n+1)^2 n}} = \sqrt{\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}} < 1$$

also $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

Monotonie – Variante 2: Es ist $a_n = n^{-1/2}(1+\frac{1}{n^2})^{1/2}$, wobei beide Faktoren monoton fallend in n sind: Die Wurzelfunktion $\sqrt{\cdot}$ ist eine monoton steigende Funktion, also ist die Folge $(\sqrt{n})_n$ monoton steigend, und damit $(1/\sqrt{n})_n$ monoton fallend; Genauso ist $(1+\frac{1}{n^2})_n$ monoton fallend, und damit $((1+\frac{1}{n^2})^{1/2})_n$ monoton fallend (denn wegen der Monotonie der Wurzelfunktion folgt aus $a_{n+1} \leqslant a_n$, dass $\sqrt{a_{n+1}} \leqslant \sqrt{a_n}$). □

14. Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{2^k} x^k$. [3 Punkte; *Hinweis:* Sie dürfen verwenden, dass $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1 = \lim_n \sqrt[n]{a}$ für alle $a > 0$.]

Lösung. Es gilt $\limsup_k \sqrt[k]{\frac{k+2}{2^k}} = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k+2} = \frac{1}{2}$, denn für alle $k \geqslant 2$

$$1 < \sqrt[k]{k+2} \leqslant \sqrt[k]{k+k} = \sqrt[k]{2}\sqrt[k]{k}$$

und $\lim_k \sqrt[k]{2} = 1 = \lim_k \sqrt[k]{k}$. Nach der Formel von Hadamard gilt also $R = 2$. □

15. Ist die Funktion f auf $\mathbb{Q}$, definiert durch

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0, & x < \sqrt{2} \\ 1, & x > \sqrt{2} \end{cases},$$

stetig? Beweisen Sie Ihre Aussage. [4 Punkte]

Lösung. Da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ist f auf ganz $\mathbb{Q}$ definiert. Die Funktion ist stetig: Sei $\varepsilon > 0$. Für $x \in \mathbb{Q}$ sei $\delta_x := \frac{|x-\sqrt{2}|}{2}$. Dann ist $\delta_x > 0$ und für alle $y \in \mathbb{Q}$ mit $|x-y| < \delta_x$, gilt $|f(x)-f(y)| = 0 < \varepsilon$, denn entweder sind $x, y > \sqrt{2}$ oder $x, y < \sqrt{2}$. □

16. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $y \in D$ mit $f(y) \neq 0$. Beweisen Sie, dass f dann sogar in einer Umgebung von y ungleich null ist, d.h. *es gibt $\delta > 0$, sodass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ mit $|x - y| < \delta$.* [5 Punkte]

Beweis. Setze $\varepsilon := |f(y)|$. Da f stetig ist, gibt es $\delta > 0$, sodass $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - y| < \delta$. Aus der Rückwärts-Dreiecksungleichung ($\big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$) folgt

$$|f(y)| - |f(x)| \leqslant \Big||f(y)|-|f(x)|\Big| \leqslant |f(y)-f(x)|\,,$$

also $|f(x)| \geqslant |f(y)| - |f(y) - f(x)|$. Wegen $|f(y)| = \varepsilon$ gilt somit für alle $x \in D$ mit $|x - y| < \delta$

$$|f(x)| \;\geqslant\; \varepsilon - |f(y)-f(x)| \;>\; 0\,,$$

d.h. insbesondere $f(x) \neq 0$ falls $|x - y| < \delta$. □

17. Beweisen Sie: *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist auch $|f| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$ stetig.* [2 Punkte]

Beweis. Der Betrag $|\cdot|$ ist (Lipschitz-)stetig, denn $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Da Verknüpfungen stetiger Funktionen stetig sind, folgt die Stetigkeit von $|f| = |\cdot| \circ f$ aus der Stetigkeit von f. □

18. Ist $c_n := 2^{-n/2}(1+i)^n$ dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [0, 2\pi)$ mit $c_n = e^{ix_n}$. [2 Punkte]

Beweis. Es ist $|c_n| = (\sqrt{2})^{-n}|1 + i|^n = 1$, denn $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Polardarstellung von c_n somit $c_n = |c_n|\, e^{ix_n} = e^{ix_n}$ für ein $x_n \in [0, 2\pi)$. □

19. Zeigen Sie, dass es $x \in [1, 2]$ gibt, sodass die Gleichung $x^3 = x^2 + x + 1$ erfüllt ist. [4 Punkte]

Beweis. Schreiben wir $h(x) := x^3 - x^2 - x - 1$, dann lautet die Gleichung $h(x) = 0$, d.h. wir müssen zeigen, dass h im Intervall $[1, 2]$ (mindestens) eine Nullstelle hat. Es ist $h(1) = 1 - 1 - 1 - 1 = -2$ und $h(2) = 8 - 4 - 2 - 1 = 1$, d.h. $h(1) < 0 < h(2)$. Da h stetig ist (Polynom), gibt es nach dem Zwischenwertsatz also ein $x \in [1, 2]$ mit $h(x) = 0$. □

20. Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(*a*) Geben Sie eine zur Definition äquivalente Formulierung der Aussage *f ist differenzierbar in $a \in D$ mit Ableitung $f'(a)$*, unter der Benutzung von Differenzenquotienten. Wann nennt man f differenzierbar? [2 Punkte]

Lösung. f ist differenzierbar in $a \in D$, genau dann wenn es ein offenes Intervall $I \subset D$ gibt, sodass $a \in I$ und *für alle* Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und $x_n \in D$ sowie $x_n \neq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$ die Folge der Differenzenquotienten $\big(\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und zwar gegen denselben Wert, unabhängig von der Wahl von $(x_n)_n$. Dieser Grenzwert wird dann Ableitung von f an der Stelle a genannt, und mit $f'(a)$ oder $\frac{df}{dx}(a)$ bezeichnet, d.h.

$$f'(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\,.$$

Eine Funktion wird differenzierbar genannt, wenn sie in allen Punkten aus ihrem Definitionsbereich, d.h. in allen $a \in D$, differenzierbar ist.
Bemerkung: Man schreibt auch $\frac{df}{dx}$ für die Ableitungsfunktion f', d.h. $\frac{df}{dx}(x) := f'(x)$, und manchmal auch $\frac{d}{dx}f(x) := f'(x)$. Außerdem gilt

$$f'(a) \;=\; \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,,$$

wobei die Schreibweise $x \to a$ gerade bedeutet: Ein Ausdruck $A(x)$ konvergiert genau dann für $x \to a$, wenn die Folge $(A(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_n x_n = a$ und $x_n \neq a \ \forall n$. Äquivalent kann man jede solche Folge schreiben als $x_n = a + h_n$, mit einer Nullfolge $(h_n)_n$ mit $h_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (nämlich $h_n := x_n - a$). $\square$

(b) Zeigen Sie mithilfe von (a), dass die Funktion $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ differenzierbar ist und finden Sie die Ableitung g' (ohne die Quotientenregel, direkt mit (a)). [3 Punkte]

Lösung. Für alle $x \in (0,\infty)$ und $h \neq 0$ gilt

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{h}\frac{x-(x+h)}{x(x+h)} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

Ist nun $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $h_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(x+h_n) - g(x)}{h_n} = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x(x+h_n)} = -\frac{1}{x^2}$$

d.h. insbesondere ist g differenzierbar auf $(0,\infty)$, mit $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ für alle $x \in (0,\infty)$. $\square$

(c) Berechnen Sie die Ableitung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)^4 - \cos(x)^4$. [3 Punkte]

Lösung. Anstatt mit der Produktregel ($(fg)' = f'g + fg'$, wobei f, g differenzierbare Funktionen sind) die Ableitung von $\sin(x)^4 = \sin(x)^2 \sin(x)^2$ (und dasselbe für $\cos(x)$) auszurechnen, benutzen wir die dritte binomische Formel, um zu schreiben

$$f(x) = \big(\sin(x)^2 + \cos(x)^2\big)\big(\sin(x)^2 - \cos(x)^2\big) = \sin(x)^2 - \cos(x)^2,$$

denn $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$. Wegen $\sin'(x) = \cos(x)$ und $\cos'(x) = -\sin(x)$ folgt mit der Produktregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin'(x)\sin(x) + \sin(x)\sin'(x) - \cos'(x)\cos(x) - \cos(x)\cos'(x) \\ &= 2\sin'(x)\sin(x) - 2\cos'(x)\cos(x) = 4\sin(x)\cos(x) \end{aligned}$$

$\square$

21. (a) Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} kx^k = x\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right).$$

[4 Punkte; *Bemerkung:* Man schreibt $\frac{d}{dx}f(x) := f'(x)$ für die Ableitung von f an der Stelle x.]

Beweis. Es ist

$$s_n = x\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = x\sum_{k=0}^{n}\frac{d}{dx}x^k = x\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n} x^k,$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass im Allgemeinen gilt

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n} g_k(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k'(x)$$

wobei $g_0, \ldots, g_n$ differenzierbare Funktionen sind. Dies folgt per Induktion aus der einfachen Identität $(f+g)' = f' + g'$, falls f, g differenzierbar. Mit der geometrischen Summenformel (vgl. Aufgabe 10)

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

folgt die Aussage $s_n = x\frac{d}{dx}\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

(b) Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{2014} kx^k < \frac{x}{(1-x)^2}$$

im Fall $0 < x < 1$. [5 Punkte; *Tipp:* Benutzen Sie Aufgabe 9 um $\lim_{n\to\infty} s_n$ zu berechnen.]

Beweis. Sei nun $0 < x < 1$. Nach der Quotientenregel gilt

$$\frac{d}{dx}\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x^n-nx^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

Wegen $\lim_n x^n = 0$ (da $0<x<1$), Aufgabe 9 und Teil (a) folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Nun ist $kx^k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also ist die Folge $(\sum_{k=1}^{n} kx^k)_n$ streng monoton wachsend, und daher gilt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{N} kx^k < \sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

insbesondere im Fall $N = 2014$. □