Übungen zur Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Lösung zu Blatt 9

Aufgabe 9.1 [Potenzreihen, 8 Punkte] Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren folgende Potenzreihen? Was ist jeweils der Konvergenzradius?

$$(i)\ \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^n)^2}{n!} \qquad (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}.$$

Lösung. Wir erinnern zunächst daran, dass es für eine Potenzreihe $\sum_n a_n x^n$ genau eine Zahl $R \in [0, \infty[\cup \{\infty\}$ gibt, so dass die Reihe für $|x| < R$ konvergent und für $|x| > R$ divergent ist. Dies ist der Konvergenzradius. (vgl. Satz 2.54)

(i) [3 Punkte] Die Reihe ist divergent für $x = \pm 1$, da der allgemeine Term nicht gegen Null strebt. Somit $R \leq 1$. Andererseits ist die Reihe konvergent für $|x| < 1$, nach dem Quotientenkriterium. Folglich ist $R = 1$ und die Reihe divergiert für alle $|x| > 1$.

(ii) [2 Punkte] Wegen $(x^n)^2 = (x^2)^n$ ist die angegebene Reihe von oben beschränkt durch $\exp(x^2)$ (nicht gleich, da die Reihe erst bei $n = 1$ beginnt). Sie hat somit denselben Konvergenzradius wie die Exponentialreihe, d.h. $R = \infty$.

(iii) [3 Punkte] Die Reihe konvergiert für $x = \pm 1$ (mit Grenzwert $e^{\pm 1}$; man beachte dass n^2 genau dann gerade ist, wenn n gerade ist). Somit $R \geq 1$. Sei $a_n = x^{n^2}/n!$ mit $x > 1$. Dann gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{(n+1)^2}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^{n^2}} = \frac{x^{2n+1}}{n} \to \infty$$

(wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass $\frac{x^n}{n} \to \infty$ für $x > 1$, was z. B. aus dem binomischen Lehrsatz folgt). Folglich divergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium. Daher ist $R = 1$ und die Reihe konvergiert für alle $|x| < 1$ und divergiert für alle $|x| > 1$.

Aufgabe 9.2 [Exponentialfunktion; 8 Punkte] Zeigen Sie:

(i) $|e^{ix} - 1| = 2|\sin \frac{x}{2}|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
[2 Punkte; *Tipp:* Berechnen Sie zunächst $\cos(2x)$ mithilfe von Satz 2.64.]

Beweis. Es gilt $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 1 - 2\sin(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei wir benutzt haben, dass $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ersetzen wir x durch $x/2$, so ergibt ein Umstellen der Gleichung $1 - \cos(x) = 2\sin(x/2)^2$. Es folgt

$$\begin{aligned} |e^{ix} - 1| &= |\cos(x) - 1 + i\sin(x)| = \sqrt{(\cos(x) - 1)^2 + \sin(x)^2} \\ &= \sqrt{\sin(x)^2 + \cos(x)^2 - 2\cos(x) + 1} = \sqrt{2(1 - \cos(x))} = 2\left|\sin \frac{x}{2}\right| \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. □

(*ii*) $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})\ \forall z \in \mathbb{C}$, direkt mithilfe der Definition (Satz 2.60).

[3 Punkte; *Tipp:* Zeigen Sie zunächst, dass die komplexe Konjugation stetig ist.]

Beweis. Schreiben wir $S_N(z) := \sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!}$, dann gilt nach der Definition der Exponentialfunktion $\exp(z) = \lim_{N\to\infty} S_N(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Nach Satz 1.70 gilt $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ (mit Induktion sieht man, dass das Gleiche für Summen beliebig – aber endlich – vieler komplexer Zahlen gilt), sowie $\overline{\alpha z} = \alpha\bar{z}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$ (man nennt eine Abbildung mit diesen Eigenschaften *linear*). Deshalb gilt $\overline{S_N(z)} = S_N(\bar{z})$ und darum

$$\exp(\bar{z}) = \lim_{N\to\infty} \overline{S_N(z)}\,.$$

Um den Beweis abzuschließen, genügt es also zu zeigen, dass $\overline{\lim_n z_n} = \lim_n \bar{z}_n$ für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen. Schreiben wir $z_n = a_n + ib_n$ mit $a_n := \mathrm{Re}(z_n)$ und $b_n := \mathrm{Im}(z_n)$, dann gilt nach Satz 2.5

$$\lim_{n\to\infty} \bar{z}_n = \lim_{n\to\infty} (a_n - ib_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - i \lim_{n\to\infty} b_n = \overline{\lim_{n\to\infty} (a_n + ib_n)} = \overline{\lim_{n\to\infty} z_n}$$

Bemerkung: Wir haben oben mithilfe der Charakterisierung aus Satz 2.5 gezeigt, dass der komplexe Betrag folgenstetig ist. Die Stetigkeit folgt auch direkt aus $|\bar{z}-\bar{w}| = |\overline{z-w}| = |z-w|$. Die Äquivalenz von Folgenstetigkeit und Stetigkeit wurde in der Vorlesung allerdings nur im Reellen gezeigt (siehe Satz 3.2), gilt aber ebenso im Komplexen. Wenn Sie (wie im Tipp vorgeschlagen) zunächst die Stetigkeit der Konjugation gezeigt haben und dann die Folgenstetigkeit gefolgert haben, wird dies dennoch als korrekte Lösung akzeptiert. □

(*iii*) Für jedes $q \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n\to\infty} n^{-q}e^n = \infty$ [3 Punkte; *Tipp:* Benutzen Sie die Exponentialreihe um zu zeigen, dass $e^x > x^{q+1}/(q+1)!$ für alle $x > 0$.]

Bemerkung: Die Exponentialfunktion wächst also schneller als jede Potenz.

Beweis. Ist $q \in \mathbb{N}$ und schreiben wir wieder $S_N(x)$ für die Partialsumme $\sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}$, so gilt für alle $N \geqslant q+1$ und $x > 0$, dass $S_N(x) > \frac{x^{q+1}}{(q+1)!}$. Insbesondere folgt

$$e^x = \lim_{N\to\infty} S_N(x) \geqslant \frac{x^{q+1}}{(q+1)!}$$

Für $x = n \in \mathbb{N}$ gilt somit

$$\frac{e^n}{n^q} > \frac{n^{q+1}}{(q+1)!\,n^q} = \frac{n}{(q+1)!}$$

und darum $\lim_n n^{-q}e^n = \infty$ □

Aufgabe 9.3 (!) [Restgliedabschätzung; 8 Punkte]

(a) Beweisen Sie die folgende Restgliedabschätzung der Exponentialfunktion: *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *und* $N \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$\exp(z) \;=\; \sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!} + R_{N+1}(z),$$

wobei $|R_{N+1}(z)| \leqslant 2\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| \leqslant 1 + N/2$.

[3 Punkte; *Tipp:* Schätzen Sie $|R_{N+1}(z)| = |e^z - \sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!}|$ durch die Reihe $\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$ ab, die wiederum durch das Produkt von $|z|^N/(N+1)!$ und der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{N+2}\right)^k$ beschränkt ist.]

Beweis. Es gilt

$$|R_{N+1}(z)| = \left| e^z - \sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!} \right| = \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$$

wobei wir die Dreiecksungleichung für endliche Summen (vgl. Aufgabe 5.3) auf die Partialsummen $\sum_{k=N+1}^{n} \frac{z^k}{k!}$ angewandt haben, sowie, dass Ungleichungen unter dem Grenzwert erhalten bleiben ($a_n \leqslant b_n \Rightarrow \lim_n a_n \leqslant \lim b_n$).

Schreiben wir den Summationsindex als $k = N + 1 + l$, so folgt

$$\begin{aligned} \big|R_{N+1}(z)\big| &\leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{|z|^{N+1+l}}{(N+1+l)!} \\ &= \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{|z|^l}{(N+1+l)\cdots(N+2)} \leqslant \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{|z|^l}{(N+2)^l} \end{aligned}$$

wobei wir für die letzten Ungleichung benutzt haben, dass $(N+1+l)\cdots(N+2)$ aus l Faktoren besteht, die jeweils größer oder gleich $N+2$ sind. Für $|z| \leqslant 1+N/2$ gilt

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{N+2}\right)^l \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

was den Beweis abschließt. □

(b) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{w_n}(e^{w_n}-1) = 1$, für alle Nullfolgen $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen.

[3 Punkte; *Tipp:* Aufgabenteil (a).]

Beweis. Benutzen wir die Restgliedabschätzung aus (a) für $N = 1$, so erhalten wir $|e^{w_n}-1-w_n| = |R_2(w_n)| \leqslant |w_n|^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $|w_n| \leqslant 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Ist $(w_n)_n$ eine Nullfolge, so gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|w_n| < \min\{\varepsilon, \frac{3}{2}\}$. Also gilt $|R_2(w_n)| \leqslant |w_n|^2$ *und* $|w_n| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N_0$. Es folgt

$$\left| \frac{1}{w_n}(e^{w_n}-1) - 1 \right| = \frac{|e^{w_n} - 1 - w_n|}{|w_n|} \leqslant |w_n| < \varepsilon$$

für alle $n \geqslant N_0$, weshalb die Behauptung folgt. □

(c) Sei nun $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen die gegen ein $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{z_n}-e^z}{z_n-z}$. [2 Punkte; *Tipp:* Aufgabenteil (b).]

Proof. Wenn $\lim_n z_n = z$, dann wird durch $w_n := z_n - z$ eine Nullfolge $(w_n)_n$ definiert. Nach (b) gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{z_n}-e^z}{z_n-z} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^z}{z_n-z}(e^{z_n-z}-1) = e^z \lim_{n\to\infty} \frac{1}{w_n}(e^{w_n}-1) = e^z$$

Bemerkung: Wie Sie inzwischen bestimmt erkennen konnten, haben wir hier die Ableitung der Exponentialfunktion berechnet. □

Aufgabe 9.4 (!) [Topologie von $\mathbb{R}$ – Teil III, 8 Punkte] Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $X \subset \mathbb{R}$ eine abgeschlossene (vgl. 6.2) und sowohl nach oben als auch nach unten beschränkte Menge.

(i) Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $y_n \in f(X)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Unterfolge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ hat, mit $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} \in f(X)$.

[4 Punkte; *Tipp*: Wählen Sie eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = f(x_n)$ und $x_n \in X$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und betrachten Sie eine konvergente Unterfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.]

Beweis. Wir wählen eine Folge (x_k) von Urbildern, also $f(x_k) = y_k$ und $x_k \in X$. Das ist möglich, da $y_k \in f(X)$. Da X beschränkt ist, gilt selbiges für die Folge (x_k), und somit existiert eine konvergente Unterfolge $(x_{n_k})_k$ (Bolzano-Weierstrass). Wir schreiben $x := \lim_k x_{n_k}$. Da X abgeschlossen ist gilt $x \in X$. Es folgt

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \overset{(!)}{=} f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = f(x) \in f(X),$$

wobei in (!) die Stetigkeit von f benutzt wurde. Das war zu zeigen. □

(ii) Schlussfolgern Sie, dass $f(X)$ ebenfalls abgeschlossen und sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

[4 Punkte; *Tipp für die Beschränktheit:* Nehmen Sie an, es würde zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in f(X)$ geben mit $y_n > n$ und finden Sie einen Widerspruch.]

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $f(X)$ beschränkt ist. Wenn nicht, gibt es eine Folge (y_k) mit $y_k \in f(X)$ und $|y_k| > k$. Diese kann keine konvergente Unterfolge haben (konvergente Folgen sind beschränkt), im Widerspruch zu Teil (i). Folglich ist $f(X)$ beschränkt.

Sei nun $(y_k)_k$ eine konvergente Folge mit $y_k \in f(X)$ für alle k und Grenzwert $y \in \mathbb{R}$. Laut Teil (i) hat $(y_k)_k$ eine (konvergente) Teilfolge mit Grenzwert $y' \in f(X)$. Aber alle Teilfolgen einer konvergenten Folge haben den selben Grenzwert (siehe z. B. 7.1(d)). Folglich gilt $y = y' \in f(X)$. Da $(y_k)_k$ beliebig war, ist $f(X)$ abgeschlossen. □