Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Peter Otte
WiSe 2013/14

Tom Bachmann
Sebastian Gottwald
Übungsblatt 8
03.12.2013

Übungen zur Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 8.1 [8 Punkte]

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Wir wissen bereits, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert (6.4(iii)).

Berechnen Sie $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, sowie $\limsup_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$. Ist das Wurzel- oder das Quotientenkriterium anwendbar, um über die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ zu entscheiden? [3 Punkte]

(b) Sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n \ := \begin{cases} 2^{-n} & \text{falls n gerade} \\ 2^{2-n} & \text{falls n ungerade} \end{cases} .$$

Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit dem Wurzel-, Quotienten- *und* dem Majorantenkriterium. [3 Punkte]

(c) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+5}{3n^4-4n+3}$ absolut konvergiert. [2 Punkte]

Aufgabe 8.2 [Raabekriterium; 8 Punkte]

(a) In dieser Aufgabe beweisen wir folgende Verfeinerung des Quotientenkriteriums: *Ist* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge, sodass* $n_0 \in \mathbb{N}$ *und* $\beta > 1$ *existieren, mit*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant 1 - \frac{\beta}{n} \qquad \forall n \geqslant n_0 \tag{$*$}$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

Bemerkung: Man sagt, dass eine Aussage $A(n)$ *fast immer* gilt, falls sie nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ falsch ist, d.h. falls ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $A(n)$ für alle $n \geqslant n_0$ gilt.

(i) Setzen Sie $\alpha_n := |a_n|$ und zeigen Sie unter der Annahme von ($*$), dass fast immer gilt: $(\beta-1)\alpha_n \leqslant (n-1)\alpha_n - n\alpha_{n+1}$ [1 Punkt]

(ii) Folgern Sie, dass die Folge $(n\alpha_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ab einem bestimmten $n_0 \in \mathbb{N}$ monoton fällt. [1 Punkt]

(iii) Folgern Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}((n-1)\alpha_n - n\alpha_{n+1})$ konvergiert. [2 Punkte]

(iv) Schließen Sie den Beweis ab, indem Sie die absolute Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgern. [1 Punkt]

(b) Sei $\alpha > 1$. Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}$.

[3 Punkte; *Tipp:* Wählen Sie $n_0 \geqslant (\alpha+1)^2/(\alpha-1)$ und zeigen Sie, dass dann für alle $n \geqslant n_0$ die Ungleichung $\frac{n+1}{\alpha+n+1} \leqslant 1-\frac{\alpha+1}{2n}$ gilt.]

Aufgabe 8.3 [Leibnizkriterium; 8 Punkte]

(a) Untersuchen Sie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{2k+1}$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz. [2 Punkte]

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$. [2 Punkte]

(c) Sei $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ existieren mit $a_n \leqslant \frac{1}{n}\ \forall n \geqslant n_0$ sowie $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1\ \forall n \geqslant n_1$. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergiert. [2 Punkte]

(d) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $a_k = (k+1)^{-1}$ falls k gerade, und $a_k = (k+1)^{-2}$ falls k ungerade ist. Prüfen Sie die alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ auf Konvergenz. [2 Punkte]

Aufgabe 8.4 [Kondensationskriterium, 8 Punkte]

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$2^k a_{2^{k+1}} \leq \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} a_n \leq 2^k a_{2^k}.$$

Schlussfolgern Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert. [2 Punkte; Diese Aussage ist auch als *Kondensationskriterium* bekannt.]

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 1$ schreiben wir für alle $y \in \mathbb{R}$

$$l_x(y) = \sup\left(\{n \in \mathbb{N} | x^n \leqslant y\} \cup \{1\}\right).$$

Zeigen Sie, dass dieses Supremum existiert. Welche der folgenden Reihen konvergieren, welche divergieren? Beweisen Sie ihre Aussage.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, l_2(n)}$ (ii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, l_3(n)^2}$ (iii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, l_2(n) l_2(l_2(n))^2}$.

[6 Punkte; *Tipps*: Für (ii), zeigen Sie, dass $l_3(2^n) \geq l_4(2^n) \geq n/2 - 1$. Für ($iii$), wenden Sie das Kondensationskriterium zweimal an.]

(!) *Aufgaben, die mit einem Ausrufezeichen versehen wurden, beinhalten ein sehr wichtiges Konzept, welches unbedingt verstanden werden sollte.*

Unmarkierte Aufgaben sind nicht weniger wichtig, sondern beruhen meist auf direkteren Methoden, die nicht typisch für die jeweilige Aufgabe sind, sondern häufiger auftreten.

* *Aufgaben, die mit einem Stern versehen wurden, sollten erst bearbeitet werden, wenn der Rest des Blattes gelöst wurde.*

Werfen Sie Ihre (in Zweier- oder Dreiergruppen erstellte) Lösung bis spätestens **18 Uhr am Dienstag, den 10.12.2013**, *in den gekennzeichneten Übungskasten im ersten Stock nahe der Bibliothek.*

Weitere Informationen finden Sie unter http://www.math.lmu.de/~gottwald/13ana1IS/