Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Peter Otte

WiSe 2013/14
Lösung 1
15.10.2013

# Übungen zur Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

## Lösung zu Blatt 1

**Aufgabe 1.1** [8 Punkte] Seien $A$, $B$ und $C$ Aussagen.

(a) Negieren Sie:

($i$) $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$

*Lösung.* [2 Punkte] Zunächst gilt $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$, und damit

$$\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \neg((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow \big((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)\big)$$

wobei wir im zweiten Schritt die de Morgan'sche Regel $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ benutzt haben. □

($ii$) Wenn Pils besser schmeckt als Weißbier, dann müssen Weißwürste nach 12 Uhr gegessen werden.

*Lösung.* [1 Punkt] Wir benutzen ($i$): Pils schmeckt besser als Weißbier und Weißwürste müssen nicht nach 12 Uhr gegessen werden. □

(b) Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien?

($i$) $\neg(A \wedge \neg A)$

($ii$) $A \Leftrightarrow \neg\neg A$

($iii$) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg C)$

($iv$) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

($v$) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ *(wurde bereits in (a) gezeigt)*

($vi$) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A)) \Leftrightarrow ((A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \wedge (C \Leftrightarrow A))$

*Lösung.* [5 Punkte] $(i), (ii), (iv), (v)$ und $(vi)$ sind Tautologien. □

**Aufgabe 1.2** [8 Punkte]

(a) Beweisen Sie die in der Vorlesung behaupteten Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze, sowie die zweite de Morgan'sche Regel für die Verknüpfungen $\wedge$ und $\vee$ mithilfe von Wahrheitstafeln.

(b) Seien $A$, $B$ und $C$ Aussagen. Benutzen Sie Wahrheitstafeln, um zu entscheiden ob folgende Aussagen Tautologien sind:

$(i)$ $(\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)) \Leftrightarrow A$

$(ii)$ $(A \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow \neg B)$

$(iii)$ $((A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$

*Lösung.* Die Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze für $\wedge$, sowie die zweite de Morgan'sche Regel sind folgender Wahrheitstafel zu entnehmen [4 Punkte]. Die entsprechenden Gesetze für $\vee$ folgen durch Negation mithilfe der de Morgan'schen Regeln [1 Punkt]. Zusätzlich beweist die Wahrheitstafel, dass die Aussagen $(i)$ und $(iii)$ aus $(b)$ Tautologien sind [2 Punkte], sowie dass $(ii)$ keine Tautologie ist [1 Punkt].

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | w | w | w | w | f | f | f | f |
| $B$ | w | w | f | f | w | w | f | f |
| $C$ | w | f | w | f | w | f | w | f |
| $\neg A$ | f | f | f | f | w | w | w | w |
| $\neg B$ | f | f | w | w | f | f | w | w |
| $A \wedge B$ | w | w | f | f | f | f | f | f |
| $B \wedge A$ | w | w | f | f | f | f | f | f |
| $B \wedge C$ | w | f | f | f | w | f | f | f |
| $(A \wedge B) \wedge C$ | w | f | f | f | f | f | f | f |
| $A \wedge (B \wedge C)$ | w | f | f | f | f | f | f | f |
| $A \vee B$ | w | w | w | w | w | w | f | f |
| $A \vee C$ | w | w | w | w | w | f | w | f |
| $A \vee (B \wedge C)$ | w | w | w | w | w | f | f | f |
| $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ | w | w | w | w | w | f | f | f |
| $\neg(A \wedge B)$ | f | f | w | w | w | w | w | w |
| $\neg A \vee \neg B$ | f | f | w | w | w | w | w | w |
| $B \wedge \neg B$ | f | f | f | f | f | f | f | f |
| $\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)$ | w | w | w | w | f | f | f | f |
| $A \Rightarrow \neg B$ | f | f | w | w | w | w | w | w |
| $A \wedge \neg B$ | f | f | w | w | f | f | f | f |
| $(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)$ | w | w | f | f | w | w | w | w |
| $A \Rightarrow B$ | w | w | f | f | w | w | w | w |

□

**Aufgabe 1.3** [8 Punkte]

(a) Zeigen Sie, dass es nur *eine* leere Menge gibt.

*Lösung.* [1 Punkt] Angenommen $\emptyset$ und $\emptyset'$ sind leere Mengen. Dann gilt $x \in \emptyset \Leftrightarrow x \in \emptyset'$, da beide Aussagen falsch sind. Also $\emptyset \subset \emptyset'$ und $\emptyset' \subset \emptyset$, d.h. $\emptyset = \emptyset'$. □

(b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

$(i)$ $\{1\} \subset \{\{1\}, \{1,2\}\}$

$(ii)$ $\emptyset \subset \{\emptyset\}$

$(iii)$ $0 \in \{\emptyset\}$

$(iv)$ $\{\{1\}\} \cup \{\{2\}\} = \{1,2\}$

*Lösung.* [4 Punkte] Wahr ist $(ii)$, denn die leere Menge ist in jeder Menge enthalten. Die Aussagen $(i)$ und $(iv)$ sind falsch. Korrekt wäre $\{1\} \in \{\{1\}, \{1,2\}\}$, sowie $\{\{1\}\} \cup \{\{2\}\} = \{\{1\}, \{2\}\}$. Die Frage ob $(iii)$ wahr oder falsch ist, ist genau genommen nicht zu beantworten (Konstruktion natürlicher Zahlen nicht eindeutig). Für diesen Kurs nehmen wir aber an, dass $\emptyset \neq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. für uns ist die Aussage falsch. □

(c) Sei $G$ eine Datenbank der Länge $N$ über potentielle Opfer eines Hackerangriffs und seien $s_j$ die (Namen der) potentiellen Opfer, wobei $j \in \{1, \ldots, N\} =: \mathcal{J}$. Wir identifizieren $G$ mit der Gesamtheit der potentiellen Opfer, also $G = \{s_j \,|\, j \in \mathcal{J}\}$. Sei $A(\cdot)$ die Aussageform mit Grundbereich $G$, definiert durch

$$A(s) := s \text{ hat eine Firewall.}$$

(i) Formulieren Sie folgende Aussage in Worten und mithilfe des Allquantors:

$$A(s_1) \wedge A(s_2) \wedge \cdots \wedge A(s_{N-1}) \wedge A(s_N)\,.$$

*Lösung.* [1 Punkt] In Worten: *Alle potentiellen Opfer in der Datenbank haben eine Firewall.* Mit Allquantor: $\forall j \in \mathcal{J} : A(s_j)$. □

(ii) Formulieren Sie folgende Aussage ausschließlich mithilfe der Aussagen $A(s_k)$, wobei $k \in \mathcal{J}$, und der Verknüpfung $\vee$:

$$\big\{s \in G \,|\, \exists j \in \mathcal{J} : (s = s_j) \wedge (A(s_j) \vee A(s_{j+1}))\big\} \neq \emptyset\,.$$

*Lösung.* [2 Punkte] In Worten: *Es gibt mindestens ein potentielles Opfer mit Firewall.* Also $A(s_1) \vee A(s_2) \vee \cdots \vee A(s_{N-1}) \vee A(s_N)$. □

**Aufgabe 1.4** [8 Punkte]

(a) Sei $m$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie: Wenn $m^2$ durch 3 teilbar ist, dann ist auch $m$ durch 3 teilbar.

*Tipp:* Schreiben Sie $R_3(m)$ für den Rest bei Division einer natürlichen Zahl $m$ durch 3, also $0 \leqslant R_3(m) \leqslant 2$, und zeigen Sie zunächst $(R_3(m) = 1) \Rightarrow (R_3(m^2) = 1)$, sowie $(R_3(m) = 2) \Rightarrow (R_3(m^2) = 1)$.

(b) Zeigen Sie: Sind $m, n$ natürliche Zahlen, so gilt $\frac{m^2}{n^2} \neq 3$. Was könnte das *...etc.* aus der Vorlesung bedeuten?

*Lösung.* Für eine natürliche Zahl $m$ können wir durch algorithmische Division genau eine natürliche Zahl $n$ und eine natürliche Zahl $0 \leq r < 3$ finden, so dass $m = 3n + r$. Dann gilt $r = R_3(m)$.

(a) [4 Punkte] Wir haben $R_3(m) = 1$ genau dann, wenn $m = 3n + 1$. Dann haben wir $m^2 = 9n^2 + 6n + 1 = 3(3n^2 + 2n) + 1$, und somit $R_3(m^2) = 1$. Ebenfalls haben wir $R_3(m) = 2$ genau dann, wenn $m = 3n + 2$, und somit $m^2 = 9n^2 + 12n + 4 = 3(3n^2 + 4n + 1) + 1$. Folglich gilt wieder $R_3(m^2) = 1$.

Wir wollen nun $R_3(m^2) = 0 \implies R_3(m) = 0$ zeigen. Die Kontraposition ist $R_3(m) \neq 0 \implies R_3(m^2) \neq 0$. Aber $R_3(m) \in \{0, 1, 2\}$, und somit gilt $R_3(m) \neq 0$ genau dann, wenn $R_3(m) = 1$ oder $R_3(m) = 2$. Das Ergebnis folgt also aus dem vorherigen Absatz.

(b) [4 Punkte] Seien $m, n$ natürliche zahlen mit $\frac{m^2}{n^2} = 3$. Wir nehmen ohne Verlust der Allgemeinheit an, dass $m$ und $n$ teilerfremd sind ("kürzen"). Nun gilt $m^2 = 3n^2$, also $R_3(m^2) = 0$. Aus (a) folgt $R_3(m) = 0$, also $m = 3k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und somit $3n^2 = 9k^2$. Demnach gilt also $n^2 = 3k^2$, und somit $R_3(n^2) = 0$. Aus (a) folgt wiederum $R_3(n) = 0$, was ein Widerspruch ist.

Eine Verallgemeinerung der Irrationalität von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ ist die folgende Aussage: Seien $x \in \mathbb{Q}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ so, dass

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Dann gilt $x \in \mathbb{Z}$. ("$\mathbb{Z}$ ist ein normaler Bereich") □