

## Übungen zur Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

### Lösung zu Blatt 11

#### Aufgabe 11.1 [Regel von L'Hospital, 8 Punkte]

- (a) Es seien  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen, mit<sup>1</sup>  $\lim_{x \rightarrow b^-} |f(x)| = \infty$ , sowie  $\lim_{x \rightarrow b^-} |g(x)| = \infty$ . Wir nehmen an, dass die Grenzwerte  $L = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)/g(x)$  und  $L' = \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)/g'(x)$  existieren, und  $L, L' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Sei weiterhin  $f'(x) \neq 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ . Zeigen Sie, dass  $L = L'$ .

[5 Punkte; *Tipp*: Schreiben Sie  $f_1(x) = 1/f(x)$ ,  $g_1(x) = 1/g(x)$  für  $x \in ]a, b[$ , und definieren Sie  $f_1(b) = 0 = g_1(b)$ . Zeigen Sie, dass Satz 4.19 auf  $\lim_{x \rightarrow b^-} g_1(x)/f_1(x)$  angewandt werden kann. Schlussfolgern Sie, dass  $L = L^2/L'$ .]

*Beweis.* Wir schreiben  $f_1(x) = 1/f(x)$ ,  $g_1(x) = 1/g(x)$  und definieren  $f_1(b) = 0 = g_1(b)$ . Da  $\lim_{x \rightarrow b^-} |f(x)| = \infty$  ist  $f_1 : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Selbiges für  $g_1$ .

Da  $\lim_{x \rightarrow b^-} |f(x)| = \infty$  können wir ohne Verlust der Allgemeinheit annehmen, dass  $f(x) \neq 0$  für alle  $x \in ]a, b[$  (es existiert  $a < c < b$  so dass für  $x > c$ ,  $|f(x)| > 1$ , und wir können einfach  $a$  durch  $c$  ersetzen). Selbiges für  $g$ .

Wir haben  $f_1'(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$ . Da  $f(x) \neq 0$  ist  $f_1$  also differenzierbar. Selbiges für  $g_1$ . Da  $f'(x) \neq 0$  (per Annahme) ist  $f_1'(x) \neq 0$ . Nun verwenden wir Satz 4.19. Wir haben

$$L = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{g_1(x)}{f_1(x)}.$$

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{g_1'(x)}{f_1'(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{g'(x) f(x)^2}{f'(x) g(x)^2} = \frac{L^2}{L'}$$

nach den Grenzwertsätzen (wir haben  $L' \neq 0$  per Annahme). Folglich ist Satz 4.19 anwendbar und liefert  $L = \frac{L^2}{L'}$  und somit  $L' = L$  (da  $L \neq 0$  per Annahme).  $\square$

- (b) Es seien  $f, g : ]a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen, mit  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , sowie  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ . Wir nehmen an, dass  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert, und  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x$ . Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

[3 Punkte; *Tipp*: Satz 4.19 angewandt auf  $f_1(x) = f(1/x)$ , und  $g_1(x) = g(1/x)$ .]

---

<sup>1</sup>Man schreibt  $x \rightarrow b^-$ , für  $x \rightarrow b$  unter der Bedingung  $x < b$ . Analog  $x \rightarrow b^+$ , wenn  $x \rightarrow b$  mit  $x > b$ .

*Beweis.* Wir nehmen ohne Verlust der Allgemeinheit an, dass  $a > 1$ . Wir schreiben  $f_1(x) = f(1/x)$ ,  $g_1(x) = g(1/x)$ . Dann sind  $f_1, g_1 : ]0, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar nach der Kettenregel, wobei  $b = \frac{1}{a}$ . Wir definieren  $f_1(0) = 0 = g_1(0)$ , die Funktionen bleiben so stetig.

Es gilt  $f_1'(x) = \frac{-f'(1/x)}{x^2}$  und analog für  $g_1$ . Folglich haben wir

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

wobei wir im Letzen Schritt (\*) benutzt haben, dass für  $(x_n) \in ]0, b[$ ,  $\lim_n x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_n 1/x_n = \infty$ .

Satz 4.19 liefert nun

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

*Bemerkung 1:* Die Annahmen in Aufgabe (a) sind sehr stark und können deutlich abgeschwächt werden. Folgende Formulierung findet sich z.B. in Rudin, Satz 5.13: *Seien  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, mit  $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Sei weiterhin  $\lim_{x \rightarrow b^-} |g(x)| = \infty$ . Dann gilt  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)/g(x) = A$ .* Insbesondere impliziert also wie in Satz 4.19 die Existenz von  $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)/g'(x)$  die Existenz von  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)/g(x)$ .

*Bemerkung 2:* Zusammen mit der Vorlesung, haben wir nun die Fälle  $\frac{\infty}{\infty}$  für  $x \rightarrow a^\pm$ , sowie  $\frac{0}{0}$  für  $x \rightarrow b^\pm$  und  $x \rightarrow \infty$  gezeigt. Die Regel von L'Hospital gilt aber auch im Fall  $\frac{\infty}{\infty}$  für  $x \rightarrow \infty$ . Sie dürfen im Folgenden den Satz auf jede dieser vier Möglichkeiten anwenden.

### Aufgabe 11.2 [8 Punkte]

(i) Sei  $q \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie mithilfe von Induktion und der Regel von L'Hospital, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{e^x} = 0.$$

*Beweis.* [2 Punkte] Wir verwenden Induktion auf  $q$ . Für  $q = 0$  und  $x > 0$  gilt  $\exp(x) = \sum_n \frac{x^n}{n!} > x$  und somit  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0$ .

Sei nun  $q \geq 1$ . Dann gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x)$ . Daher folgt aus L'Hospitals Regel, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{\exp(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{qx^{q-1}}{\exp(x)} \stackrel{IH}{=} 0.$$

□

(ii) Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Sei  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ . Zeigen Sie, dass für  $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

[2 Punkte; *Tipp:* Was ist  $f^{(k+1)}(x)$ ?]

*Beweis.* Sei  $g_n(x) = x^n$ . Ein einfaches Induktionsargument zeigt, dass für  $k > n$ ,  $g^{(k)}(x) = 0$  für alle  $x$ . Insbesondere ist  $g_n$  beliebig oft differenzierbar. Nach der Summenregel ist also  $f$  beliebig oft differenzierbar, mit  $f^{(n+1)}(x) = 0$  für alle  $x$ . Die Behauptung folgt nun direkt aus dem Satz von Taylor (4.22).  $\square$

- (iii) Seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen, mit  $f'(x) = g(x)$ ,  $g'(x) = -f(x)$ ,  $f(0) = 0$  und  $g(0) = 1$ . Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (= \sin x)$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (= \cos x).$$

[4 Punkte; *Tipp:* Wenden Sie den Satz von Taylor an und verwenden Sie den Extremwertsatz (3.13) um zu zeigen, dass das Restglied für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert.]

*Beweis.* Offenbar sind  $f, g$  beliebig oft differenzierbar. Wir betrachten ein Intervall  $] -a, a[$ . Aus dem Satz von Taylor (4.22) folgt, dass für  $x \in ] -a, a[$

$$f(x) = \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_N(x),$$

wobei

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1}$$

für ein  $\xi \in ] -a, a[$  (tatsächlich  $\xi$  zwischen  $x$  und 0).

Aus  $f' = g$ ,  $g' = -f$  und  $f(0) = 0$ ,  $g(0) = 1$  folgt, dass  $f^{(2k)}(0) = 0$  und  $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ . Ich behaupte, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ . Wenn so, dann gilt

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_N(x) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Sei  $C > 0$  so, dass für  $x \in ] -a, a[$ ,  $|f(x)| < C$  und  $|g(x)| < C$  (Extremwertsatz). Dann gilt  $|R_n(x)| < \frac{C}{(n+1)!} x^{n+1} \leq C \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$  (da  $f^{(n+1)} = \pm f$  oder  $f^{(n+1)} = \pm g$ ). Aber  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = 0$  (z. B. da  $\exp(a)$  konvergiert).

Folglich gilt  $f(x) = \sin x$  für alle  $x \in ] -a, a[$ . Da  $a$  beliebig war, gilt es für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Ein analoges Argument funktioniert für  $g(x)$ .  $\square$

**Aufgabe 11.3** [8 Punkte] Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) := \ln \frac{\sqrt{x^2+1} + 1 + x}{\sqrt{x^2+1} + 1 - x}$$

- (a) Zeigen Sie:  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . [4 Punkte]

*Beweis.* Da  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$  erhalten wir durch Benutzung der Ketten-, Quotienten- und Produktregel,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x^2+1}+1-x}{\sqrt{x^2+1}+1+x} \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)(\sqrt{x^2+1}+1-x) - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)(\sqrt{x^2+1}+1+x)}{(\sqrt{x^2+1}+1-x)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \frac{(x+\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1}+1-x) - (x-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1}+1+x)}{(\sqrt{x^2+1}+1+x)(\sqrt{x^2+1}+1-x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \frac{x - x^2 + x^2 + 1 + \sqrt{x^2+1}(1-x) - x - x^2 + x^2 + 1 + \sqrt{x^2+1}(1+x)}{(\sqrt{x^2+1}+1)^2 - x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \frac{2 + 2\sqrt{x^2+1}}{x^2+1 + 2\sqrt{x^2+1} + 1 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \end{aligned}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . □

- (b) Geben Sie explizit ein Polynom  $p$  dritten Grades an, sodass  $p^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$  für alle  $k = 0, \dots, 3$ . [4 Punkte; *Hinweis:* Mit *explizit* ist gemeint, dass Sie einen Ausdruck für  $p$  finden sollen, in dem nirgends  $f$  oder eine ihrer Ableitungen vorkommt.]

*Lösung.* Aus (a) folgt für die zweiten und dritten Ableitungen

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}} \\ f'''(x) &= -\frac{d}{dx} \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}} = -\frac{(x^2+1)^{3/2} - 3x^2(x^2+1)^{1/2}}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{5/2}} \end{aligned}$$

Wir haben also  $f(0) = \ln 1 = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f''(0) = 0$ , sowie  $f'''(0) = -1$ . Wie man leicht nachprüft, entspricht das Taylor-Polynom vom Grad  $N \in \mathbb{N}$  von  $f$  im Punkt  $x_0$ ,  $\sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$ , (per Konstruktion) genau dem Polynom  $N$ -ten Grades, dessen erste  $N$  Ableitungen an der Stelle  $x_0$  mit denen von  $f$  (an der Stelle  $x_0$ ) übereinstimmen. Das gesuchte Polynom (hier im Fall  $x_0 = 0$ ,  $N = 3$ ) ist somit

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 = x - \frac{x^3}{6}$$

□

**Aufgabe 11.4** [Allgemeineres Taylor-Restglied; 8 Punkte] Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $(n+1)$ -mal differenzierbare Funktion, sodass für jedes  $k = 0, \dots, n$  die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow a^+} f^{(k)}(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow b^-} f^{(k)}(x)$  existieren. Nach Satz 4.22 (Taylor-Formel) können wir für  $x, x_0 \in [a, b]$  schreiben

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_{n+1}(x, x_0).$$

*Bemerkung:* Man nennt diese Darstellung auch *Taylor-Entwicklung von  $f$  im Punkt  $x_0$* . Der Term  $R_{n+1}(x, x_0)$ , der im Allgemeinen als *Taylor-Restglied* bezeichnet wird, hat mehrere Darstellungen, z.B. die aus der Vorlesung bekannte *Lagrange-Darstellung*. Weitere

Darstellungen erhält man durch Wahl des Parameters  $p$  in Gleichung (\*) unten (im Fall  $p = 1$  spricht man von der *Cauchy-Darstellung*).

Zeigen Sie: Für jedes  $p \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $\xi \in [a, b]$  zwischen  $x$  und  $x_0$ , sodass gilt

$$R_{n+1}(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^{n+1} \frac{1}{p} \left( \frac{x - x_0}{x - \xi} \right)^p \quad (*)$$

[*Tipp*: Welcher Wert für  $p$  liefert die Lagrange-Darstellung? Benutzen Sie dieses Wissen um den Beweis der Taylor-Formel mit Lagrange-Restglied aus der Vorlesung entsprechend anzupassen (*genauer*: die Wahl der Hilfsfunktion  $h$ ).]

*Beweis*. Für  $p = n+1$  lautet (\*)

$$R_{n+1}(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

was genau der Form des Restglieds in Satz 4.22 entspricht (Lagrange-Darstellung). Der Beweis für allgemeines  $p \in \mathbb{N}$  ist analog zur Vorlesung (siehe Skript Seite 110), wobei statt  $h(t) = (x-t)^{n+1}$  die Hilfsfunktion  $h(t) = (x-t)^p$  gewählt wird (für festes  $x \in [a, b]$ ). Das Resultat folgt dann aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz unter Berücksichtigung von  $h(x) = 0$ , und  $h'(t) = -p(x-t)^{p-1}$  (vgl. Skript).  $\square$