MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Peter Otte
WiSe 2013/14

Tom Bachmann
Sebastian Gottwald
Übungsblatt 11
14.01.2014

Übungen zur Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 11.1 [Regel von L'Hospital, 8 Punkte]

(a) Es seien $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, mit[1] $\lim_{x\to b^-} |f(x)| = \infty$, sowie $\lim_{x\to b^-} |g(x)| = \infty$. Wir nehmen an, dass die Grenzwerte $L = \lim_{x\to b^-} f(x)/g(x)$ und $L' = \lim_{x\to b^-} f'(x)/g'(x)$ existieren, und $L, L' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sei weiterhin $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$. *Zeigen Sie, dass* $L = L'$.

[5 Punkte; *Tipp:* Schreiben Sie $f_1(x) = 1/f(x)$, $g_1(x) = 1/g(x)$ für $x \in]a, b[$, und definieren Sie $f_1(b) = 0 = g_1(b)$. Zeigen Sie, dass Satz 4.19 auf $\lim_{x\to b^-} g_1(x)/f_1(x)$ angewandt werden kann. Schlussfolgern Sie, dass $L = L^2/L'$.]

(b) Es seien $f, g :]a, \infty[\to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, sowie $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Wir nehmen an, dass $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, und $g'(x) \neq 0$ für alle x. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

[3 Punkte; *Tipp:* Satz 4.19 angewandt auf $f_1(x) = f(1/x)$, und $g_1(x) = g(1/x)$.]

Bemerkung 1: Die Annahmen in Aufgabe (a) sind sehr stark und können deutlich abgeschwächt werden. Folgende Formulierung findet sich z.B. in Rudin, Satz 5.13: *Seien* $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ *differenzierbar, mit* $\lim_{x\to b^-} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. *Sei weiterhin* $\lim_{x\to b^-} |g(x)| = \infty$. *Dann gilt* $\lim_{x\to b^-} f(x)/g(x) = A$. Insbesondere impliziert also wie in Satz 4.19 die Existenz von $\lim_{x\to b^-} f'(x)/g'(x)$ die Existenz von $\lim_{x\to b^-} f(x)/g(x)$.

Bemerkung 2: Zusammen mit der Vorlesung, haben wir nun die Fälle $\frac{\infty}{\infty}$ für $x \to a^\pm$, sowie $\frac{0}{0}$ für $x \to b^\pm$ und $x \to \infty$ gezeigt. Die Regel von L'Hospital gilt aber auch im Fall $\frac{\infty}{\infty}$ für $x \to \infty$. Sie dürfen im Folgenden den Satz auf jede dieser vier Möglichkeiten anwenden.

Aufgabe 11.2 [8 Punkte]

(i) Sei $q \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mithilfe von Induktion und der Regel von L'Hospital, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{e^x} = 0.$$

[2 Punkte]

(ii) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Sei $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Zeigen Sie, dass für $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

[2 Punkte; *Tipp:* Was ist $f^{(k+1)}(x)$?]

[1] Man schreibt $x \to b^-$, für $x \to b$ unter der Bedingung $x < b$. Analog $x \to b^+$, wenn $x \to b$ mit $x > b$.

(iii) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, mit $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = -f(x)$, $f(0) = 0$ und $g(0) = 1$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (= \sin x) \\ g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad (= \cos x). \end{aligned}$$

[4 Punkte; *Tipp:* Wenden Sie den Satz von Taylor an und verwenden Sie den Extremwertsatz (3.13) um zu zeigen, dass das Restglied für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.]

Aufgabe 11.3 [8 Punkte] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \ln \frac{\sqrt{x^2+1} + 1 + x}{\sqrt{x^2+1} + 1 - x}$$

(a) Zeigen Sie: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. [4 Punkte]

(b) Geben Sie explizit ein Polynom p dritten Grades an, sodass $p^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$ für alle $k = 0, \ldots, 3$. [4 Punkte; *Hinweis:* Mit *explizit* ist gemeint, dass Sie einen Ausdruck für p finden sollen, in dem nirgends f oder eine ihrer Ableitungen vorkommt.]

Aufgabe 11.4 [Allgemeineres Taylor-Restglied; 8 Punkte] Seien $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion, sodass für jedes $k = 0, \ldots, n$ die Grenzwerte $\lim_{x \to a^+} f^{(k)}(x)$ und $\lim_{x \to b^-} f^{(k)}(x)$ existieren. Wir können (vgl. Satz 4.22, Taylor-Formel) für $x, x_0 \in [a, b]$ schreiben

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n+1}(x, x_0)\,.$$

Bemerkung: Man nennt diese Darstellung auch *Taylor-Entwicklung von f im Punkt x_0*. Der Term $R_{n+1}(x, x_0)$, der im Allgemeinen als *Taylor-Restglied* bezeichnet wird, hat mehrere Darstellungen, z.B. die aus der Vorlesung bekannte *Lagrange-Darstellung*. Weitere Darstellungen erhält man durch Wahl des Parameters p in Gleichung $(*)$ unten (im Fall $p = 1$ spricht man von der *Cauchy-Darstellung*).

Zeigen Sie: *Für jedes $p \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\xi \in [a, b]$ zwischen x und x_0, sodass gilt*

$$R_{n+1}(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^{n+1} \frac{1}{p} \left(\frac{x - x_0}{x - \xi} \right)^p \qquad (*)$$

[*Tipp:* Welcher Wert für p liefert die Lagrange-Darstellung? Benutzen Sie dieses Wissen um den Beweis der Taylor-Formel mit Lagrange-Restglied aus der Vorlesung entsprechend anzupassen (*genauer:* die Wahl der Hilfsfunktion h).]

Werfen Sie Ihre (in Zweier- oder Dreiergruppen erstellte) Lösung bis spätestens **18 Uhr am Dienstag, den 21.01.2014**, *in den gekennzeichneten Übungskasten im ersten Stock nahe der Bibliothek.*

Weitere Informationen finden Sie unter http://www.math.lmu.de/~gottwald/13ana1IS/