Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Peter Otte

WiSe 2013/14
Lösung 10
07.01.2014

Übungen zur Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Lösung zu Blatt 10

Aufgabe 10.1 (!) [Mittelwertsatz, 8 Punkte]

(a) Sei $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $F(0) = 0$, die auf $(0, \infty)$ differenzierbar ist mit $F'(x) \geqslant 0$ für alle $x > 0$. Zeigen Sie, dass $F(x) \geqslant 0$ für alle $x \geqslant 0$. [2 Punkte]

Beweis. Für $x = 0$ ist nach Voraussetzung $F(x) = 0$. Sei also $x > 0$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in (0, x)$, sodass $F(x)-F(0) = F'(\xi)(x-0)$. Also ist $F(x) = F'(\xi)\, x \geqslant 0$, denn $x > 0$ und $F'(\xi) \geqslant 0$ nach Voraussetzung. □

(b) Sind $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(0) = g(0)$, die auf $(0, \infty)$ differenzierbar sind, sodass $f'(x) \leqslant g'(x)$ für alle $x > 0$. Folgern Sie, dass $f(x) \leqslant g(x)$ für alle $x \geqslant 0$. [2 Punkte]

Beweis. Definieren wir $F := g - f$, dann ist F differenzierbar auf $(0, \infty)$ und es gilt $F(0) = g(0) - f(0)$, sowie $F'(x) = g'(x) - f'(x) \geqslant 0$ für alle $x > 0$. Also folgt aus (a), dass $g(x) - f(x) \geqslant 0$, d.h. $f(x) \leqslant g(x)$ für alle $x \geqslant 0$. □

(c) Zeigen Sie: Für alle $x, c \geqslant 0$ gilt $\sqrt{x^2 + c^2} - c \leqslant x$. [4 Punkte]

Beweis. Wir benutzen (b) mit $f(x) := \sqrt{x^2+c^2} - c$ und $g(x) := x$ für alle $x \geqslant 0$. Es gilt $f(0) = 0 = g(0)$. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, sind g, sowie die Funktionen $x \mapsto \sqrt{x}-c$ und $x \mapsto x^2+c^2$ differenzierbar auf $(0, \infty)$. Nach der Kettenregel ist somit auch f auf $(0, \infty)$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+c^2}} \leqslant 1 = g'(x)$. Nach ($b$) gilt also $f(x) \leqslant g(x)$ für alle $x, c \geqslant 0$. □

Aufgabe 10.2 (!) [Betragsfunktion, 8 Punkte] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$.

(a) Zeigen Sie, dass $g := f\big|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung g'. [2 Punkte]

Beweis. Für $x > 0$ ist $g(x) = x$, und für $x < 0$ gilt $g(x) = -x$. Damit ist g auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar. Die Ableitung können wir direkt mithilfe der Kettenregel aus der Darstellung $|x| = \sqrt{x^2}$ berechnen: $g'(x) = \frac{x}{|x|}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. □

(b) Zeigen Sie, dass f in $x = 0$ nicht differenzierbar ist. [1 Punkt; *Tipp:* Finden Sie eine Nullfolge $(x_n)_n$ mit $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass $\frac{|x_n|}{x_n}$ für $n \to \infty$ nicht konvergiert.]

Beweis. Für die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{R}}$, definiert durch $x_n := \frac{(-1)^n}{n}$, ergibt sich für den n-ten Differenzenquotienten an der Stelle 0

$$\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = \frac{|x_n|}{x_n} = (-1)^n$$

Da die rechte Seite für $n\to\infty$ nicht konvergiert, ist f nach Satz 4.2 in $x=0$ nicht differenzierbar. □

(*c*) Wir definieren für jedes $\varepsilon \geqslant 0$ eine Funktion $f_\varepsilon : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch $f_\varepsilon(x) := \sqrt{x^2+\varepsilon^2}$. Zeigen Sie:

(*i*) Für jedes $\varepsilon > 0$ ist f_ε differenzierbar. [1 Punkt]

Beweis. Da $\varepsilon > 0$, ist $x^2+\varepsilon^2 > 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Damit folgt nach der Kettenregel die Differenzierbarkeit von f_ε, denn $x\mapsto x^2+\varepsilon^2$ ist differenzierbar für alle $x\in\mathbb{R}$ und die Funktion $y\mapsto\sqrt{y}$ ist differenzierbar für jedes $y>0$. □

(*ii*) Für alle $x\in\mathbb{R}$ ist die Funktion $\varepsilon\mapsto f_\varepsilon(x)$ in $\varepsilon=0$ Lipschitz-stetig. [2 Punkte; *Tipp:* Aufgabe 10.1]

Beweis. In dieser Aufgabe müssen Sie unbedingt darauf achten, die richtige Variable zu betrachten: Hier ist $x\in\mathbb{R}$ *fest*, während ε als Variable betrachtet wird. Für dieses feste x untersuchen wir also die Funktion $h_x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definiert durch $h_x(\varepsilon) := f_\varepsilon(x)$. Die Lipschitz-Stetigkeit von h_x folgt dann aus 10.1c, denn

$$|h_x(\varepsilon)-h_x(0)| = |\sqrt{x^2+\varepsilon^2}-\sqrt{x^2}| = \sqrt{\varepsilon^2+x^2}-|x| \leqslant \varepsilon\,.$$

Hierbei wurde 10.1c mit $c := |x|$ auf die Variable ε angewandt. □

(*iii*) f_ε approximiert f *gleichmäßig*, d.h. es gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f_\varepsilon(x)-f(x)\right| = 0$$

Man nennt f_ε in diesem Zusammenhang eine *Regularisierung* von f. [2 Punkte]

Beweis. Nach Aufgabenteil (*ii*), gilt $|f_\varepsilon(x)-f(x)| = \sqrt{x^2+\varepsilon^2}-|x| \leqslant \varepsilon$, und damit $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_\varepsilon(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$. Da $|f_\varepsilon(x)-f(x)|\geqslant 0$ und $\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon = 0$, folgt die Aussage. □

Aufgabe 10.3 (!) [Kettenregel, 8 Punkte]

(*a*) Für $x>0$ und $a\in\mathbb{R}$ definieren wir

$$x^a := e^{a\log x}.$$

Bestimmen Sie die Ableitungen von $f(x)=x^a$, $g(x)=a^x$ und $h(x)=x^x$. [4 Punkte]

Beweis. Da Ableitungsregeln schon aus der Schule bekannt sind, ist es hier besonders wichtig klarzumachen, welche Regeln und Sätze verwendet werden. Man erhält durch einfache Rechnung:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^a &\overset{Def.}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(a\log x) \overset{(*)}{=} \exp(a\log x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a\log x)\\ &\overset{4.1.1(2)}{=} \exp(a\log x)\, a/x \overset{2.62(a)}{=} a\exp(a\log x)\exp(-\log x)\\ &\overset{2.61}{=} a\exp((a-1)\log x) \overset{Def.}{=} ax^{a-1},\end{aligned}$$

In (*) haben wir die Kettenregel zusammen mit Beispiel 4.3(b) ($\exp' = \exp$) verwendet. Zu beachten ist, dass die Beziehung $xx^a = x^{a+1}$ zwar gilt, aber bewiesen werden muss, wenn sie zur Verwendung kommen soll (der Beweis ist implizit in der obigen Rechnung). Die anderen Aufgaben sind analog:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x \overset{Def.}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(x\log a) \overset{(*)}{=} \exp(x\log a)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\log a) &\overset{4.3(a)}{=} \exp(x\log a)\,\log a\\ &\overset{Def.}{=} a^x\log a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^x &\overset{Def.}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(x\log x) \overset{(*)}{=} \exp(x\log x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\log x)\\ &\overset{4.6(b),\,Def}{=} x^x\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log x + \log x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\right) \overset{4.3(a),\,4.11(2)}{=} x^x(x/x+\log x) = x^x(1+\log x).\end{aligned}$$

□

(*b*) Berechnen Sie die Ableitungen von $\arcsin(x)$ und $\arccos(x)$ (vgl. Satz 3.19(b)).

[4 Punkte; *Tipp:* Die Gleichung $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ könnte hilfreich sein.]

Beweis. Wir benutzen den Satz über die Ableitung von Umkehrfunktionen (4.9). Wir berechnen

$$\text{“}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin(x)\text{“} = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Da $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ und $\sin(\arcsin(x)) = x$ gilt $\cos(\arcsin(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}$. Wir wissen dass $\arcsin(x)$ stetig ist, und für $x \in\,]-1,1[$ gilt $\sqrt{1-x^2} \neq 0$. Es folgt somit aus Satz 4.9 dass $\arcsin(x)$ auf $]-1,1[$ differenzierbar ist. Da $\arcsin(x)$ streng monoton wachsend ist, folgt aus dem Mittelwertsatz, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin(x) > 0$. Folglich gilt das positive Vorzeichen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in\,]-1,1[\,.$$

Das Argument für $\arccos(x)$ ist analog, mit dem Unterschied, dass $\arccos(x)$ monoton *fallend* ist, und somit das negative Vorzeichen gelten muss:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in\,]-1,1[\,.$$

□

Aufgabe 10.4 (!) [Extrema, 8 Punkte] Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x + 1.$$

Aus ihrer Skizze sollten insbesondere Anzahl und ungefähre Lage der Nullstellen, sowie Anzahl, ungefähre Lage und Art der Extrema hervorgehen. Begründen Sie diese Eigenschaften ihrer Skizze. Verwendung technischer Hilfsmittel ist weder vorgesehen noch notwendig für diese Aufgabe.
[*Tipps/Anleitung:* Nutzen Sie, dass kritische Punkte von f zu Nullstellen von f' korrespondieren, und dass f zwischen den kritischen Punkten monoton ist (Mittelwertsatz). Darüber hinaus wissen Sie z. B., dass $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$. Zeigen Sie, dass $f'(x)$ genau drei Nullstellen x_1, x_2, x_3 hat, mit $-1 < x_1 < -\frac{1}{2} < x_2 < 1 < x_3 < 2$. Zeigen Sie, dass f bei x_1 ein Minimum, bei x_2 ein Maximum und bei x_3 ein Minimum hat, mit $f(x_1) < 0$. Zeigen Sie, dass f' auf $[1, 2]$ monoton wachsend ist, berechnen Sie $f(1)$ und $f'(1)$, und Schlussfolgern Sie mittels 10.1(b) dass $f(x_3) > 0$. Nun Skizzieren Sie den Graphen.]

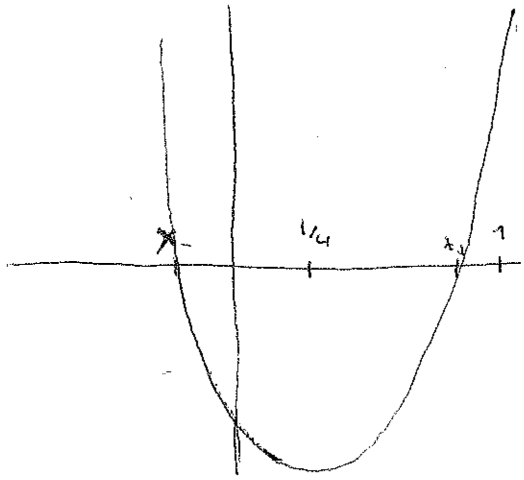
Beweis. Eine Vorbemerkung: Es folgt direkt aus dem Mittelwertsatz, dass eine Funktion $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, die differenzierbar ist, und deren Ableitung f' konstantes Vorzeichen hat, monoton ist. Folglich sind differenzierbare Funktionen zwischen ihren kritischen Punkten (und $\pm\infty$) streng monoton. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x + 1 \\ f'(x) &= 4x^3 - 3x^2 - 4x + 2 \\ f''(x) &= 12\left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

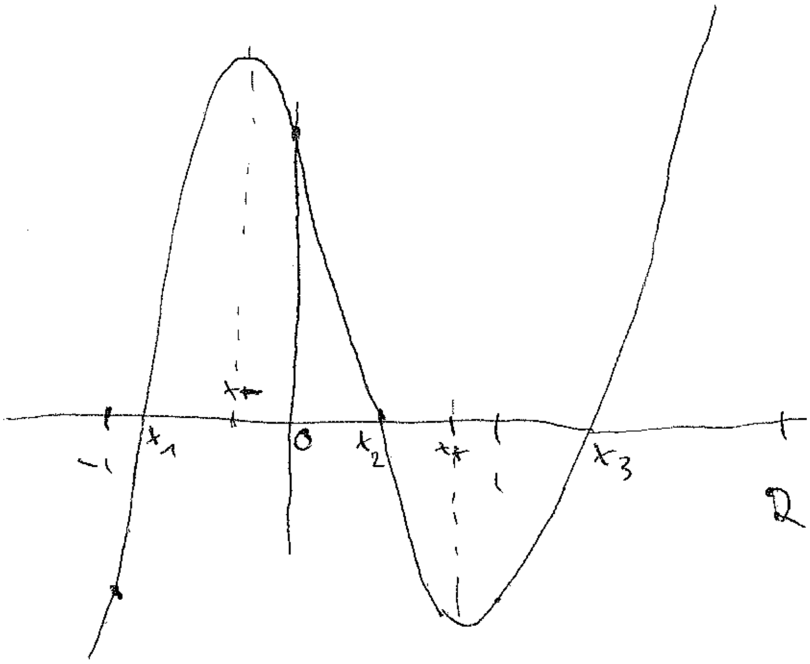
$f''(x)$ hat also eine nach oben geöffnete Parabel als Graphen, mit Nullstellen

$$x_\pm = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{3}}.$$

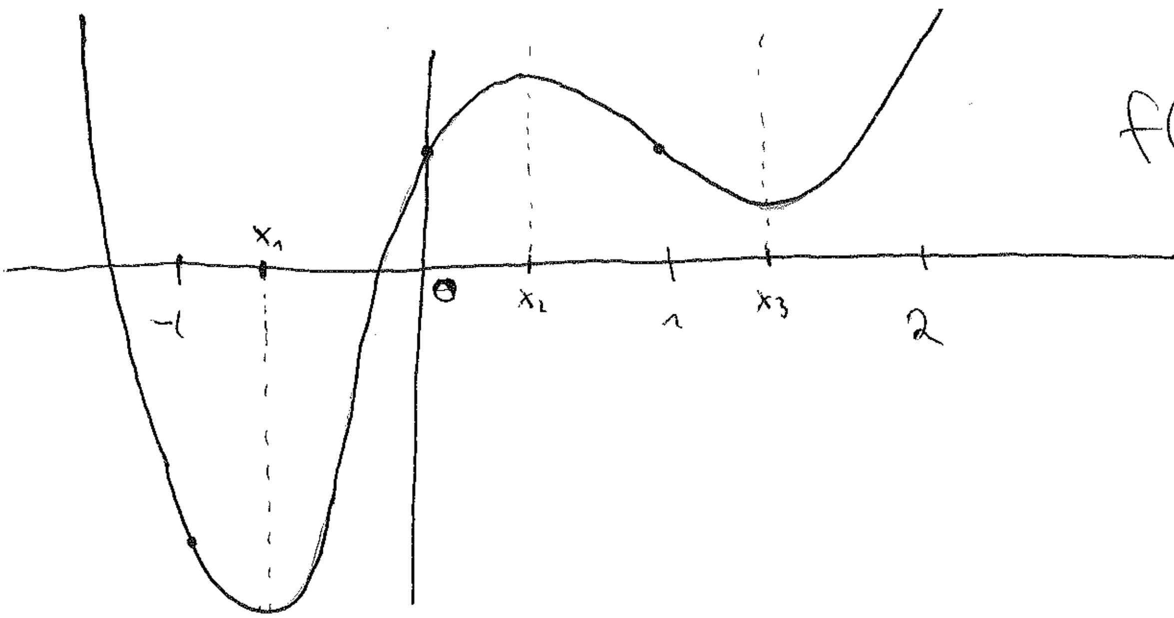
Wir halten für später fest, dass $x_+ < 1$. Tatsächlich gilt $x_+ < 1$ genau dann, wenn $\sqrt{1/16 + 1/3} < \frac{3}{4}$, und man sieht leicht, dass das Quadrat der linken Seite kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, wohingegen das Quadrat der rechten Seite größer als $\frac{1}{2}$ ist.
Die Funktion $f'(x)$ hat also genau zwei kritische Punkte, mit x-Koordinaten x_+, x_-. Wir berechnen $f'(-1) = -1 < 0$, $f'(0) = 2 > 0$, $f'(1) = -1 < 0$ und $f'(2) = 10 > 0$. Da f' monoton ist zwischen den kritischen Punkten, muss es sich bei x_- um ein Maximum und bei x_+ um ein Minimum handeln. Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass f' drei Nullstellen x_1, x_2, x_3 hat, mit $-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$. Aus der Monotonie zwischen Kritischen Punkten, also in $]\infty, x_-[$, $]x_-, x_+[$ und $]x_+, \infty[$ folgt, dass f' keine weiteren Nullstellen hat.
Die Funktion f hat also genau drei Kritische Punkte x_1, x_2 und x_3. Wir berechnen $f(-1) = -3 < 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 1$. Da f zwischen den kritischen Punkten x_1, x_2, x_3 streng monoton ist, muss x_1 ein Minimum sein, x_2 ein Maximum und x_3 ein Minimum. Aus dem Zwischenwertsatz und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ folgt, dass f zwei Nullstellen hat, eine in $]-\infty, -1[$ und eine in $]-1, 0[$.
f hat keine weiteren Nullstellen: Dazu erinnern wir daran, dass $x_+ < 1$. Folglich ist $f'(x)$ auf $[1, \infty[$ monoton wachsend, und somit gilt für $x \geq 1$ dass $f'(x) > f'(1) = -1$. Es folgt aus 10.1(b), dass $f(x) \geq 2 - x$ für alle $x > 1$, und somit insbesondere $f(x_2) \geq 2 - x_2 > 0$ (da $x_2 < 2$). Da x_2 (lokales) Minimum von f ist, kann f also keine weiteren Nullstellen haben. □



f''(x)



f'(x)



f(x)