Dr. Ralf Gerkmann

Wintersemester 2023/24
12.02.2024

Zahlentheorie

(Wiederholungsklausur alte Studienordnung)

Klausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ____

Studiengang:
- ❏ Lehramt Gymnasium
- ❏ Master Wirtschaftspädagogik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Sie erhalten diese Daten während der Klausur.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ____________________

Aufgabe 1. (4+4+2 Punkte)

Wir betrachten im Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen die Teilmenge

$$S \quad = \quad \left\{ \frac{a}{7^b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z} \;,\; b \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass S ein Teilring von $\mathbb{R}$ mit $S \supset \mathbb{Z} \cup \{\frac{5}{7}\}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass S mit dem Teilring $\mathbb{Z}[\frac{5}{7}]$ von $\mathbb{R}$ übereinstimmt.

(c) Geben Sie die Menge der Einheiten von S an. Ein Nachweis ist *nicht* erforderlich.

Name: ______________________________

Aufgabe 2. (3+4+3 Punkte)

Wir betrachten die Menge $R = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit den durch komponentenweise Addition und Multiplikation gegebenen Verknüpfungen, d.h. wir definieren die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf R durch

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{und} \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$$

für alle $(a, b), (c, d) \in R$. Ohne Beweis darf verwendet werden, dass $(R, +, \cdot)$ ein Ring ist.

(a) Bestimmen Sie die Menge der Nullteiler von R (mit Nachweis).

(b) Bestimmen Sie die Menge der Einheiten von R (mit Nachweis).

(c) Ist R ein Integritätsbereich? Ist R ein Körper? Bitte begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Name: ____

Aufgabe 3. (3+4+3 Punkte)

Wir betrachten in $\mathbb{C}$ den Teilring

$$R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Einheiten des Rings R (mit Nachweis).

(b) Entscheiden Sie, welche der Elemente 15, 29, $2 + 3\sqrt{-5}$, $4 + 3\sqrt{-5}$ in R irreduzibel sind, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Gleichungen $21 = 3 \cdot 7 = (1 + 2\sqrt{-5})(1 - 2\sqrt{-5})$, dass 3 im Ring R zwar irreduzibel, aber kein Primelement ist.

Name: ____________________

Aufgabe 4. (2+6+2 Punkte)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $a, u, v \in \mathbb{Z}$ mit $ua + vn = \mathrm{ggT}(a, n) = 1$. Zeigen Sie, dass im Restklassenring die Gleichung $u + n\mathbb{Z} = (a + n\mathbb{Z})^{-1}$ erfüllt ist.

(b) Bestimmen Sie die multiplikativen Inversen der Elemente $\bar{3}$, $\bar{9}$, $\overline{27}$ im Körper $\mathbb{F}_{43}$.

(c) Sei $R = \mathbb{Z}[i]/(5)$ und $\alpha = i + (5) \in R$. Bestimmen Sie das Inverse α^{-1} von α in R.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. (2+4+4 Punkte)

(a) Formulieren Sie das Eisenstein-Kriterium.

(b) Bestimmen Sie alle irreduziblen, normierten Polynome vom Grad 2 in $\mathbb{F}_3[x]$.

(c) Beweisen Sie mit Hilfe des Reduktionskriteriums, dass das Polynom $f = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 7x - 10$ in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist.

Name: ______________________________

Aufgabe 6. (2+2+4+4 Punkte)

(a) Geben Sie alle Primideale und alle maximalen Ideale des Rings $\mathbb{Z}$ an.

(b) Geben Sie alle Primideale und alle maximalen Ideale des Rings $\mathbb{Q}$ an.

(c) Zeigen Sie, dass $I = (2+i, 3)$ im Ring $\mathbb{Z}[i]$ der Gauß'schen Zahlen mit dem Einheitsideal übereinstimmt.

(d) Weisen Sie nach, dass $J = (7, 1+2\sqrt{-5})$ im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ kein Hauptideal ist. Dabei darf ohne Nachweis verwendet werden, dass $J \subsetneq (1)$ gilt.

In Teil (a) und (b) ist *kein* Nachweis erforderlich.

Name: ______________________________

Aufgabe 7. (4+3+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie ein $r \in \mathbb{N}$ und zyklische Gruppen $C_1, ..., C_r$, so dass die prime Restklassengruppe $(\mathbb{Z}/600\mathbb{Z})^\times$ isomorph zu $C_1 \times ... \times C_r$ ist.

(b) Begründen Sie, dass $(\mathbb{Z}/600\mathbb{Z})^\times$ keine zyklische Gruppe ist.

(c) Geben Sie die Anzahl der Elemente der Ordnung 2 in $(\mathbb{Z}/600\mathbb{Z})^\times$ an.
Ein Nachweis ist *nicht* erforderlich.

Name: ____

Aufgabe 8. (4+6 Punkte)

(a) Begründen Sie, dass die Lösungsmenge des Kongruenzsystems

$$x \equiv 2 \bmod 3 \;,\; x \equiv 3 \bmod 11 \;,\; x \equiv 7 \bmod 13$$

mit der Lösungsmenge des Kongruenzsystems $x \equiv 14 \bmod 33$, $x \equiv 7 \bmod 13$ übereinstimmt, und diese wiederum mit der Lösungsmenge der Kongruenz $x \equiv -19 \bmod 429$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Kongruenzsystems $x \equiv 4 \bmod 23$, $x \equiv 6 \bmod 41$.

In Teil (b) ist kein Nachweis erforderlich, es genügt der Rechenweg.