LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Ralf Gerkmann

Wintersemester 2023/24
15.02.2024

Algebra

(Wiederholungsklausur alte Studienordnung)

Klausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ____

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Sie erhalten diese Daten während der Klausur.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ______________________________

Aufgabe 1. (5+3+2 Punkte)

Wir betrachten in der Gruppe $G = (\mathbb{Q}, +)$ die Untergruppen $U = \langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5} \rangle$ und $V = \langle \frac{1}{30} \rangle$.

(a) Begründen Sie, dass die Elemente 1, $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$ in U enthalten sind.

(b) Weisen Sie nach, dass U und V übereinstimmen.

(c) Sind $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Z}$ Untergruppen von G? Bitte begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Name: ______________________________

Aufgabe 2. (4+4+2 Punkte)

Wir betrachten die Gruppe $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, mit der komponentenweisen Addition gegeben durch $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ für $a, c \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ und $b, d \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ als Verknüpfung.

(a) Gegeben Sie jeweils ein Element der Ordnung 1, 2, 4 und 8 in G an, und begründen Sie jeweils, dass das Element tatsächlich diese Ordnung besitzt.

(b) Entscheiden Sie, ob G zyklisch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(c) Sei $N = \langle(\bar{4}, \bar{0})\rangle$. Bestimmen Sie die Ordnung der Faktorgruppe G/N (mit Nachweis).

Name: ____________________

Aufgabe 3. (6+4 Punkte)

Wir betrachten in der symmetrischen Gruppe S_6 die Untergruppe $G = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) \rangle$. Die Untergruppe $N = \langle (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6) \rangle$ von S_6 ist ein Normalteiler von G. (Das braucht nicht gezeigt werden.)

(a) Geben Sie alle Elemente der Faktorgruppe G/N als Teilmengen von G an, wobei Sie die Elemente jeder Nebenklasse in Zykelschreibweise darstellen. Geben Sie außerdem ein Repräsentantensystem von G/N an. Nachweise sind hier *nicht* erforderlich.

(b) Stellen Sie die Verknüpfungstabelle der Faktorgruppe G/N auf, wobei Sie alle Einträge durch das Repräsentantensystem aus Teil (a) darstellen.

Name: ______________________________

Aufgabe 4. (6+4 Punkte)

(a) Seien G und H Gruppen. Beweisen Sie mit dem Homomorphiesatz, dass ein Isomorphismus $(G \times H)/(G \times \{e_H\}) \cong H$ existiert.

(b) Sei nun G eine Gruppe und N ein Normalteiler von G mit $N \cong S_4$ und $G/N \cong S_3$. Zeigen Sie, dass G einen Normalteiler der Ordnung 72 besitzt.

Name: ____________________

Aufgabe 5. (4+3+3 Punkte)

Sei G eine Gruppe der Ordnung 35.

(a) Begründen Sie mit Hilfe der Sylowsätze, dass G einen Normalteiler U der Ordnung 5 und einen Normalteiler V der Ordnung 7 besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass G isomorph zu $U \times V$ ist.

(c) Weisen Sie nach, dass G eine zyklische Gruppe ist.

Name: ______________________________

Aufgabe 6. (4+3+3 Punkte)

Sei $L|\mathbb{F}_5$ eine Körpererweiterung und $\gamma \in L$ ein Element mit $\gamma^2 + \gamma + \bar{1} = \bar{0}$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von γ über $\mathbb{F}_5$ (mit Nachweis), und geben Sie die Elemente der Körpers $K = \mathbb{F}_5(\gamma)$ an.

(b) Wir betrachten in K die Elemente $\alpha = \bar{3} + \bar{2}\gamma$ und $\beta = \bar{1} + \bar{4}\gamma$. Bestimmen Sie Elemente $a, b \in \mathbb{F}_5$, so dass die Gleichung $\alpha\beta = a + b\gamma$ erfüllt ist.

(c) Verifizieren Sie die Gleichung $\alpha^2 + \alpha + \bar{2} = \bar{0}$ und bestimmen Sie mit Hilfe dieser Gleichung Elemente $c, d \in \mathbb{F}_5$, so dass $\alpha^{-1} = c + d\gamma$ gilt.

Name: ____________________

Aufgabe 7. (3+7 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass im Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen der Teilkörper $L = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \sqrt{-5})$ mit dem Teilkörper $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt{-5})$ übereinstimmt.

(b) Bestimmen Sie die Erweiterungsgrade $[\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) : \mathbb{Q}]$ und $[L : \mathbb{Q}]$ (jeweils mit Nachweis).

Ohne Beweis darf verwendet werden, dass die Polynome $f = x^5 - 2$ und $g = x^2 + 5$ in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel sind.

Name: ______________________________

Aufgabe 8. (4+6 Punkte)

Sei $f = x^4 - 7 \in \mathbb{Q}[x]$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{7})$ und $L = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{7})$.

(a) Weisen Sie nach, dass L ein Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der $\mathbb{Q}$-Homomorphismen $K \to K$ und $L \to K$, und begründen Sie jeweils Ihr Ergebnis.