

RUDOLF FRITSCH

**Bemerkungen zur Viereckslehre***Einleitung*

Mathematik ist mehr als Rechnen, dazu gehört Definieren, Behaupten, Beweisen, aber als einer der wichtigsten Bestandteile auch seit alters her das Klassifizieren, vor allem das Klassifizieren geometrischer Objekte. In der ebenen Elementargeometrie, die wir als Teil der ebenen euklidischen Geometrie auffassen, stößt man dabei zunächst auf die Dreiecke. Ein *Dreieck* ist bestimmt durch seine Ecken, drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Bekannt ist die Klassifikation: Allgemeines, gleichschenkliges, rechtwinkliges, gleichseitiges und gleichschenklilig-rechtwinkliges Dreieck. Unter Verwendung der von Leonhard Euler eingeführten Bezeichnungen für die Ecken, die Maße der Seiten und Winkel eines Dreiecks:

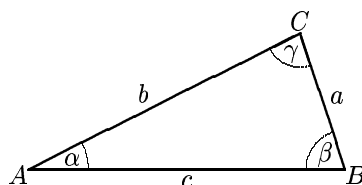


Abbildung 1: Eulers Bezeichnungen für Dreiecke

lassen sich die verschiedenen Typen durch Gleichungen charakterisieren und in der in Abbildung 2 gezeigten Weise zu einem Schema<sup>1</sup> anordnen:

Ein Dreieck ist im allgemeinen bis auf Kongruenz durch drei unabhängige Stücke bestimmt, zum Beispiel durch seine drei Seiten oder durch zwei Seiten und den zwischenliegenden Winkel. Zur Angabe eines gleichseitigen Dreiecks benötigt man jedoch nur eine Seite, statt der beiden anderen Stücke hat man

---

<sup>1</sup>Die Pfeile weisen jeweils von einem spezielleren Typ zu einem allgemeineren. Untereinanderstehende Bedingungszeilen sind einander äquivalent.

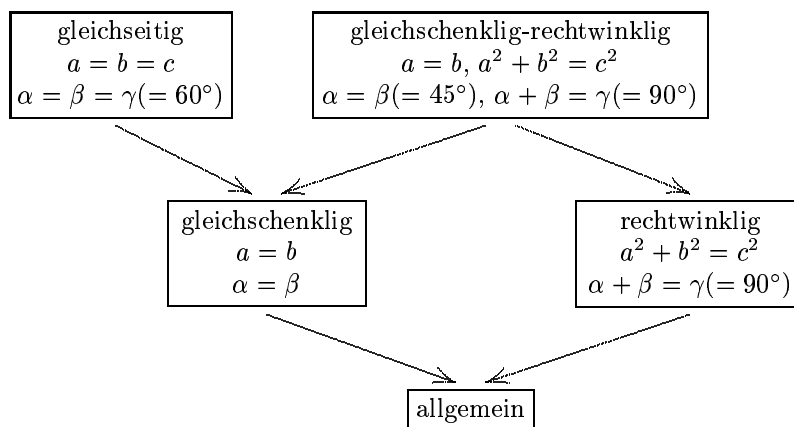


Abbildung 2: Klassifikationsschema für Dreiecke

zwei Bedingungen „ $a = b$ “ und „ $b = c$ “, oder „ $\alpha = \beta$ “ und „ $\beta = \gamma$ “. Das Klassifikationsschema ist so angeordnet, daß in der obersten Stufe die Dreieckstypen stehen, die durch zwei Bedingungen und ein Stück, und zwar die Länge einer Seite, charakterisiert sind. Darunter finden sich die Dreiecke, die einer Bedingung genügen und zwei Stücke benötigen, und ganz unten steht das allgemeine Dreieck, für das man drei Stücke braucht. [Breidenbach 1964]

Neben der Klassifikation nach Seitenlängen und Winkeln ist auch eine Klassifikation nach Symmetrien üblich. Diese gibt allerdings im Fall der Dreiecke nicht allzuviel her. Die gleichschenkligen Dreiecke sind die Dreiecke mit mindestens einer Symmetrieachse, die gleichseitigen Dreiecke weisen genau drei Symmetrieachsen auf und besitzen zusätzlich Drehsymmetrien.

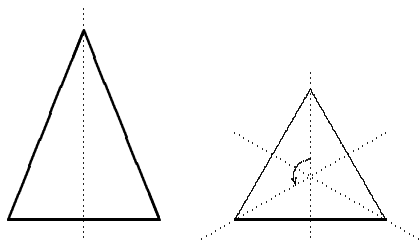


Abbildung 3: Dreieckssymmetrien

Im folgenden sollen nun entsprechende Überlegungen für konvexe Vierecke angestellt werden, ergänzt um einige Betrachtungen zur Dualität *Seite – Winkel*.

Dazu ist zunächst eine Begriffsklärung erforderlich.

**Definitionen.** Ein (*ebenes*) *Viereck* ist ein Quadrupel  $(A, B, C, D)$  von vier Punkten der Ebene, von denen keine drei in einer Geraden liegen, zusammen mit den sie der Reihe nach verbindenden Strecken  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  und  $[DA]$ ; Bezeichnung:  $[ABCD]$ .

Die Punkte  $A, B, C, D$  sind die *Ecken*, die Strecken  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$ ,  $[DA]$  die *Seiten* des Vierecks; die Strecken  $[AC]$  und  $[BD]$  heißen *Diagonalen*. Für die Längen der Seiten werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$a = \overline{AB}, \quad b = \overline{BC}, \quad c = \overline{CD}, \quad d = \overline{DA}.$$

Die Seiten  $[AB]$  und  $[CD]$  bilden ein Paar von Gegenseiten, ebenso die Seiten  $[BC]$  und  $[DA]$ .

Manchmal ist es bequem, unter den Seiten des Vierecks die ganzen Geraden  $AB, BC, CD$  und  $DA$  zu verstehen, und nicht nur die jeweils in ihnen liegenden, bereits beschriebenen Strecken. In diesem Fall heißen die Punkte zwischen den Ecken  $X, Y$  *innere* Punkte der Seite  $XY$ , die Punkte, die nicht zu der Strecke  $[XY]$  gehören, *äußere Punkte*,  $X, Y \in \{A, B, C, D\}$ ,  $X \neq Y$ .

Ein Viereck heißt *konvex*, wenn seine Diagonalen einen Schnittpunkt besitzen. Wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, so betrachten wir im folgenden nur konvexe Vierecke, und unter ihnen nur solche, die positiv orientiert sind, das heißt, die vom Diagonalschnittpunkt ausgehenden Halbgeraden, die die Ecken  $A, B, C, D$  enthalten, folgen aufeinander entgegen dem Uhrzeigersinn. Ein konvexes Viereck hat vier (*Innen-*)*Winkel*, an jeder Ecken einen; sie werden der Reihe nach durch  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\delta$  bezeichnet.

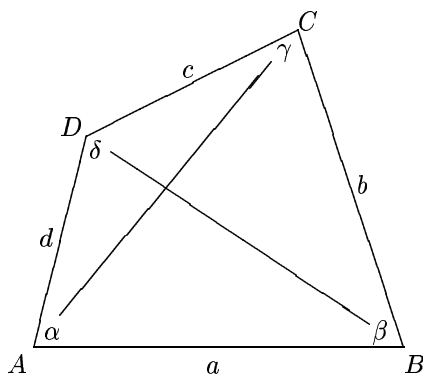


Abbildung 4: Bezeichnungen bei Vierecken

Ein Viereck ist durch fünf unabhängige Stücke, Seiten oder Winkel, bestimmt, oder durch weniger Stücke und eine entsprechende Anzahl von Bedingungen.

### Häuser von Vierecken

Für konvexe Vierecke gibt es eine ganze Reihe Klassifikationschemata; eine Übersicht und Bewertung findet sich in [Volkert 1998]. Walter Breidenbach hat eine solche Klassifikation<sup>2</sup> als „Haus der Vierecke“ bezeichnet [Breidenbach 1964]; also hat man verschiedene Häuser von Vierecken.

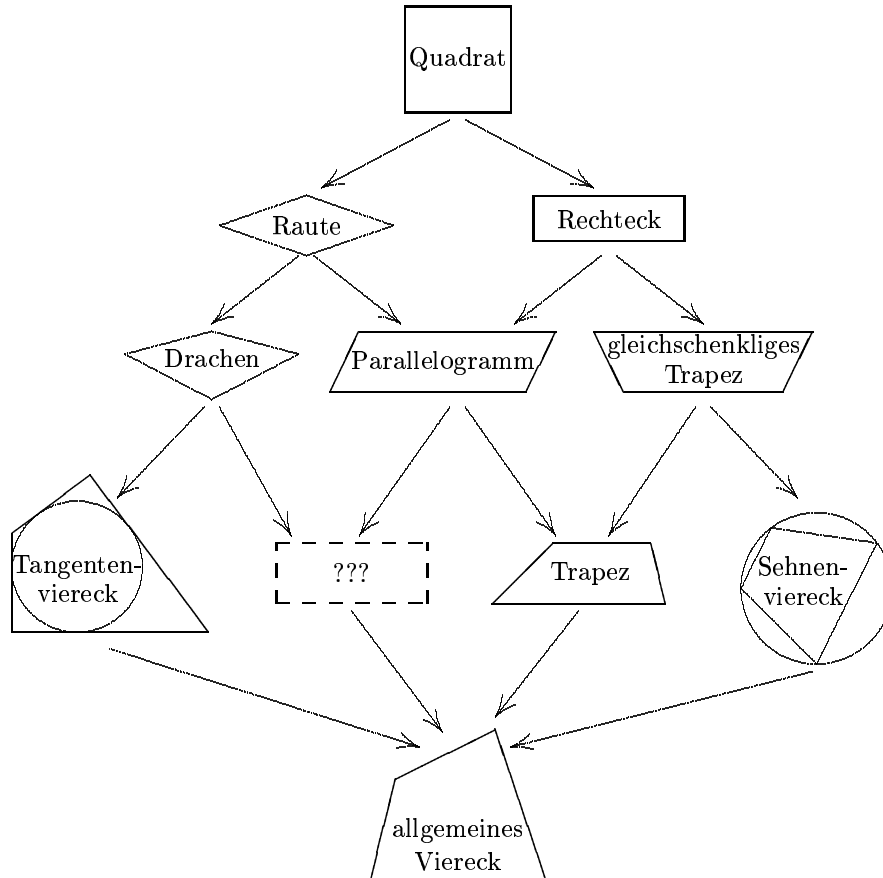


Abbildung 5: Haus der Vierecke

Im folgenden soll ein recht kleines dieser Häuser betrachtet werden, das im wesentlichen nur die gängigen Viereckstypen enthält (Abbildung 5): Quadrat, Raute, Rechteck, Drachen, Parallelogramm, gleichschenkliges Trapez, Tangentenviereck, allgemeines Trapez und Sehenviereck; zur fundamentalen Bedeutung des Sehenvierecks für eine axiomatische Behandlung des Winkelbegriff-

<sup>2</sup>Es handelt sich dabei nicht um eine Einteilung in disjunkte Klassen.

fes vergleiche man [Fritsch 1995]. Es gibt natürlich noch weitere interessante Vierecke; ein besonders reizvolles ist das Sehnentangentenviereck, das N. V. Malahovskij kürzlich mit Hilfe der komplexen Zahlen eingehend untersucht hat [Malahovskij 1997].

Das hier betrachtete Haus hat einen First, das Quadrat, wodurch es auch optisch wie ein Haus wirkt. Die Darstellung des Hauses geschieht wie im Fall der Dreiecke in verschiedenen Etagen. Für den First brauchen wir ein Stück und vier Bedingungen, die Vierecke im Stockwerk darunter benötigen zwei Stücke und drei Bedingungen, und so setzt sich das Schema nach unten fort, das Fundament bildet das allgemeine konvexe Viereck, das durch fünf unabhängige Stücke festgelegt ist.

#### Klassifikation nach Seiten und Winkeln

Die naheliegendste Einteilung ergibt sich durch Bedingungen an Seiten und Winkel, wie sie in Abbildung 6 gezeigt ist.

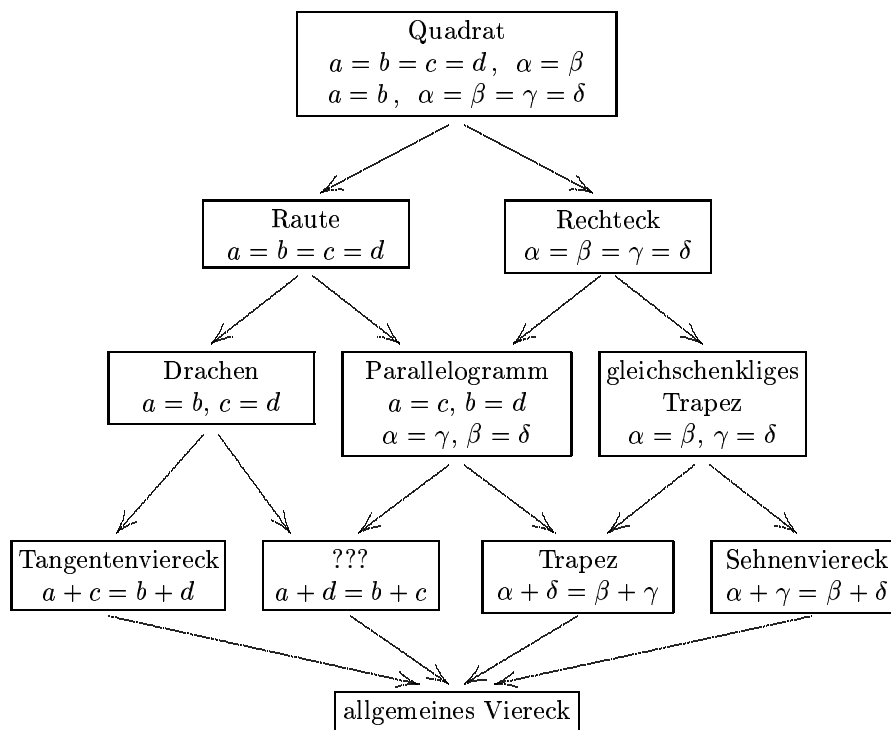


Abbildung 6: Klassifikation nach Seitenlängen und Winkeln

In Abbildung 5 sieht man ein leeres Zimmer in diesem Haus der Vierecke. Die formale Beschreibung in Abbildung 6 liefert, daß in dieses Zimmer die Vierecke gehören, die die Gleichung

$$a + d = b + c \quad (1)$$

erfüllen. Im folgenden soll zunächst die Frage behandelt werden, ob diese Vierecke auch eine interessante charakteristische Eigenschaft haben, wie sie die übrigen aufweisen.

Im Fall  $a = b$  folgt aus der Gleichung (1) auch  $c = d$ ; dann liegt ein Drachen vor. Darauf wird später eingegangen; jetzt wird erst einmal  $a < b$  angenommen. Die Behandlung des Falles  $a > b$  ist analog durchzuführen.

Wegen (1) gilt mit  $a < b$  auch  $c < d$ . Auf der Verlängerung der Strecke  $[AB]$  über  $A$  hinaus wird der Punkt  $E$  bestimmt, der von  $B$  den Abstand  $b$  hat, und in der Strecke  $[AD]$  der Punkt  $F$ , der von  $D$  den Abstand  $c$  hat (Abbildung 7).

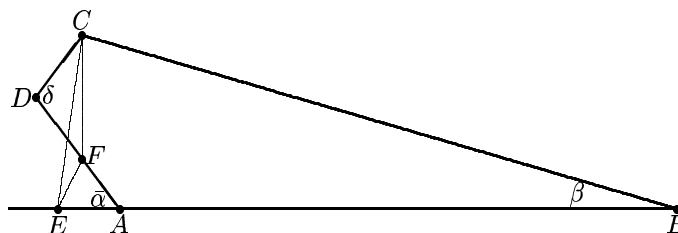


Abbildung 7: Untersuchung von  $a + d = b + c$

Nach dieser Konstruktion sind die Dreiecke  $[CBE]$  und  $[FDC]$  gleichschenkelig mit den Spitzen in den Punkten  $B$  beziehungsweise  $D$ ; die Winkel an den Spitzen sind  $\beta$  beziehungsweise  $\delta$ . Ferner gilt für die Abstände der Punkte  $E$  und  $F$  von  $A$ :

$$\overline{EA} = b - a \stackrel{(1)}{=} d - c = \overline{FA};$$

also ist auch das Dreieck  $[EAF]$  gleichschenkelig mit der Spitze in  $A$ ; der Winkel  $\tilde{\alpha}$  an der Spitze ist ein Nebenwinkel zu dem Winkel  $\alpha$ .

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Punkte  $C$ ,  $E$  und  $F$  sind kollinear, das heißt, sie liegen auf einer Geraden. Das ist genau dann der Fall, wenn gilt:

$$\sphericalangle ECB + \sphericalangle DCF = \gamma,$$

was wegen der Winkelsumme im Viereck äquivalent ist zu

$$\alpha = \gamma. \quad (2)$$

(Beweis:  $\sphericalangle ECB = 90^\circ - \beta/2$ ,  $\sphericalangle DCF = 90^\circ - \delta/2 \Rightarrow$

$$\sphericalangle ECB + \sphericalangle DCF = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2} = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} - \frac{\beta + \delta}{2} = \frac{\alpha + \gamma}{2}.)$$

Dann berechnet man

$$\begin{aligned} 90^\circ - \beta/2 &= ([CEB] \text{ gleichschenkelig}) \\ &= \sphericalangle BEC = (E, A, B \text{ kollinear, } C, E, F \text{ kollinear}) \\ &= \sphericalangle AEF = ([FEA] \text{ gleichschenkelig}) \\ &= \sphericalangle EFA = (\text{Scheitelwinkel}) \\ &= \sphericalangle CFD = ([FCD] \text{ gleichschenkelig}) \\ &= 90^\circ - \delta/2, \end{aligned}$$

woraus sich auch

$$\beta = \delta \quad (3)$$

ergibt. Nach Abbildung 6 liefern die beiden Gleichungen (2) und (3) zusammen, daß es sich bei dem Viereck  $[ABCD]$  um ein Parallelogramm handelt!

**2.** Die Punkte  $C$ ,  $E$  und  $F$  bilden ein echtes Dreieck. Wir bezeichnen mit  $U$  den Umkreismittelpunkt dieses Dreiecks.

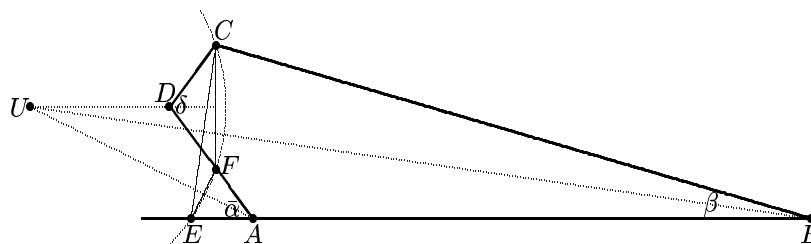


Abbildung 8: Umkreis des Dreiecks  $[CEF]$

Er liegt

- auf der Mittelsenkrechten  $m_{CE}$  der Strecke  $[CE]$  – da die Strecke  $[CE]$  Basis des gleichschenkligen Dreiecks  $[CBE]$  ist, ist diese Mittelsenkrechte zugleich die Winkelhalbierende des Winkels  $\beta$ ;
- auf der Mittelsenkrechten  $m_{EF}$  der Strecke  $[EF]$  – da die Strecke  $[EF]$  Basis des gleichschenkligen Dreiecks  $[EAF]$  ist, ist diese Mittelsenkrechte zugleich die Winkelhalbierende des Winkels  $\tilde{\alpha}$ ;
- auf der Mittelsenkrechten  $m_{FC}$  der Strecke  $[FC]$  – da die Strecke  $[FC]$  Basis des gleichschenkligen Dreiecks  $[FDC]$  ist, ist diese Mittelsenkrechte zugleich die Winkelhalbierende des Winkels  $\delta$ .

Die Mittelsenkrechte eines Winkels ist der geometrische Ort aller Punkte, die von den Schenkeln des Winkels gleichen Abstand haben. Folglich hat der Punkt  $U$  von den vier Geraden  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  und  $DA$  gleichen Abstand, das heißt, er ist Mittelpunkt eines Kreises, der diese vier Geraden berührt.

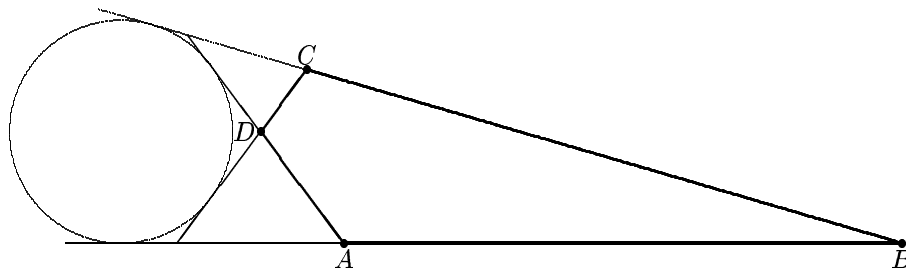


Abbildung 9: Ankreisviereck

Abbildung 10 zeigt, daß vier Geraden, von denen keine zwei parallel sind und keine drei durch einen Punkt gehen, die Ebene so zerlegen, daß nur zwei Bereiche einen solchen Kreis enthalten können, das beschränkte Viereck und das unbeschränkte Gebiet, zu dessen Rand (im dargestellten Fall) die Ecke  $D$  gehört.

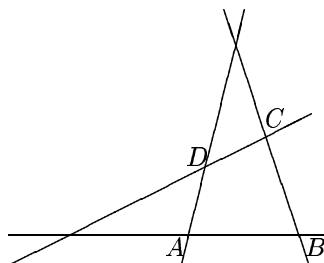


Abbildung 10: Zerlegung der Ebene durch die Seiten eines Vierecks

Für späteren Gebrauch merken wir noch an, daß sich aus Abbildung 10 darüberhinaus ergibt: *Ein Kreis, der alle vier Seiten eines Vierecks berührt, berührt diese Seiten entweder alle in inneren Punkten, oder alle in äußeren Punkten*, im Gegensatz zu den Ankreisen eines Dreiecks, die eine Seite innen und die beiden anderen außen berühren.

Da wegen der Konvexität des Vierecks  $[ABCD]$  die Winkelhalbierende  $m_{EF}$  des Winkels  $\tilde{\alpha}$  mit dem Viereck  $[ABCD]$  nur die Ecke  $A$  gemeinsam hat,



kann der Punkt  $U$  nicht im Viereck liegen. Es gibt also einen Kreis, der die vier Seiten des Vierecks in äußeren Punkten berührt, also – in Analogie zur Terminologie der Dreieckslehre – einen Ankreis, und ein Viereck, das einen Ankreis besitzt, ein *Ankreisviereck* [Zirkel 1963]. Im Gegensatz zum Dreieck, das immer drei Ankreise besitzt, gibt es – wie Abbildung 10 zeigt – zu einem Viereck höchstens einen Ankreis.

Zusammenfassend ergibt sich: *Ein Viereck  $[ABCD]$  mit  $a + d = b + c$  und  $a \neq b$  ist entweder ein Parallelogramm oder ein Ankreisviereck.* Im Fall  $a = b$  folgt aus  $a + d = b + c$  auch  $c = d$ , also haben wir ein Drachenviereck. Ein solches besitzt einen Inkreis, aber auch einen Ankreis!

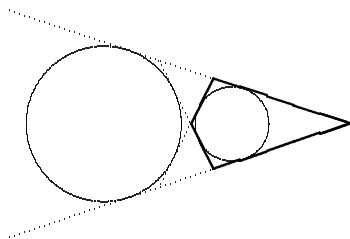


Abbildung 11: Drachen als Tangenten- und Ankreisviereck

Umgekehrt zeigt man, daß – wie im Fall eines Tangentenvierecks  $[ABCD]$  die Gleichung  $a + c = b + d$  – für ein Ankreisviereck bei geeigneter Wahl der Bezeichnung die Gleichung  $a + d = b + c$  gilt; diese Gleichung gilt offensichtlich auch für Parallelogramme. Damit ist bewiesen:

**Satz.** *Die Klasse der Vierecke, bei denen die Summe zweier benachbarter Seiten gleich der Summe der beiden anderen Seiten ist, besteht aus den Parallelogrammen und den Ankreisvierecken.* *qed*

Daß diese Klasse nur die Parallelogramme und die Ankreisvierecke enthält, hat vermutlich zum ersten Mal Karsten Alpers, allerdings auf andere Weise, bewiesen (mündliche Mitteilung). Unser Beweis orientiert sich an der Behandlung der Tangentenvierecke durch Walter Karl Julius Lietzmann (1880–1959) [Lietzmann 1966]. Ohne diesen Nachweis wurde dieses Haus der Vierecke schon in [Zirkel 1963] angegeben. Eine Variation, die Vierecke mit den Ecken, Kanten, Seiten und dem Inneren eines Tetraeders zu identifizieren, findet sich noch früher in [Gottschalk 1922]; außer den hier betrachteten kommen dabei noch fünf weitere Viereckstypen hinzu.

#### *Klassifikation nach Diagonaleigenschaften*

Eine Besonderheit der Viereckslehre besteht in der Möglichkeit der Klassifikation der konvexen Vierecke nach Diagonaleigenschaften; eine solche findet

man zum Beispiel in [Ahrens 1967]; sie befaßt sich mit der gegenseitigen Lage der Diagonalen als Ganzes. Eine andere Möglichkeit, die hier vorgestellt wird, ist eine Einteilung nach Eigenschaften der Diagonalenabschnitte und der von den Diagonalen gebildeten Winkel. Um diese Klassifikation darzustellen, ergänzen und ändern wir die bisher eingeführten Bezeichnungen (siehe Abbildung 12).

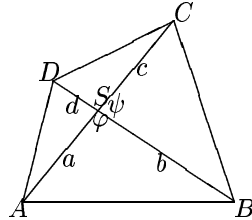


Abbildung 12: Bezeichnungsänderung

Der Schnittpunkt der Diagonalen wird durch  $S$  bezeichnet, die Diagonalenabschnitte haben die Längen

$$a = \overline{AS}, \quad b = \overline{BS}, \quad c = \overline{CS}, \quad d = \overline{DS}.$$

Darüberhinaus benötigen wir noch die Winkelmaße

$$\varphi = \sphericalangle ASB = \sphericalangle CSD, \quad \psi = \sphericalangle BSC = \sphericalangle DSA = 180^\circ - \varphi.$$

Das hier betrachtete Haus der Vierecke läßt sich gemäß Abbildung 13 beschreiben. Die angegebenen Charakterisierungen in den oberen Stockwerken bedürfen wohl keines Kommentars. Die Gleichung für das Sehnenviereck ist der bekannte Sehnensatz; die für das allgemeine Trapez folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $[ASB]$  und  $[CSD]$ . Aber eine Charakterisierung von Tangentenviereck und Ankreisviereck durch Diagonaleigenschaften ist nicht offensichtlich. Eine solche findet man mit Hilfe der bekannten Charakterisierung der Tangentenvierecke durch Seitenlängen:

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}$$

beim Tangentenviereck beziehungsweise

$$\overline{AB} + \overline{DA} = \overline{BC} + \overline{CD}$$

beim Ankreisviereck. Die Seitenlängen können wir mit Hilfe des Kosinussatzes durch die Diagonalenabschnitte und die von den Diagonalen gebildeten Winkel ausdrücken, was zu den folgenden Gleichungen führt:

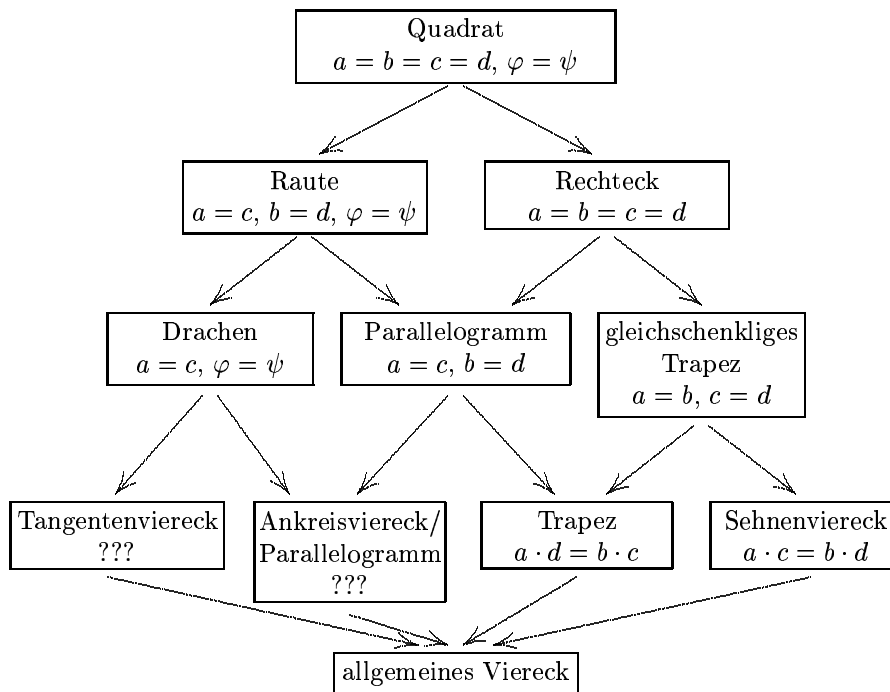


Abbildung 13: Klassifikation nach Diagonalenabschnitten und -schnittwinkeln

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi} + \sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cos \varphi} &= \\
 &= \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \psi} + \sqrt{d^2 + a^2 - 2da \cos \psi}, \\
 \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi} + \sqrt{d^2 + a^2 - 2da \cos \psi} &= \\
 &= \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \psi} + \sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cos \varphi}.
 \end{aligned}$$

Das sind nun zwar Bedingungen der gesuchten Art, aber sie sind nicht sehr erhellend. Wir wollen den Fall des Tangentenvierecks noch etwas eingehender diskutieren. Setzen wir zur Abkürzung  $\cos \varphi = p$ , so haben wir  $\cos \psi = -p$  und die zu untersuchende Gleichung erhält die Form

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2abp} + \sqrt{c^2 + d^2 - 2cdp} = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bcp} + \sqrt{d^2 + a^2 + 2dap}. \quad (4)$$

Man kann dies als eine Gleichung für  $p$  auffassen und die Frage stellen, ob und wieviele Lösungen die Gleichung im Intervall  $[-1, 1]$  bei beliebig vorgegebenen

positiven Zahlen  $a, b, c, d$  hat. Geometrisch ist das die Frage, ob und wieviele Tangentenvierecke es in der Klasse der Vierecke mit den vorgegebenen Längen  $a, b, c, d$  der Diagonalenabschnitte gibt.

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir zunächst die beiden Seiten der Gleichung (4) als getrennte Funktionen von  $p$  auf dem Intervall  $[-1, 1]$ :

$$\begin{aligned} f(p) &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2abp} + \sqrt{c^2 + d^2 - 2cdp}, \\ g(p) &= \sqrt{b^2 + c^2 + 2bcp} + \sqrt{d^2 + a^2 + 2dap}. \end{aligned}$$

Da es sich bei  $a, b, c$  und  $d$  stets um positive Zahlen handelt, fällt  $f$  in diesem Intervall monoton von  $a + b + c + d$  nach  $|a - b| + |c - d|$ , während  $g$  monoton wächst, von  $|a - d| + |b - c|$  nach  $a + b + c + d$ . Damit gibt es genau ein  $p$  im Inneren des Intervalls mit  $f(p) = g(p)$ . Als Sonderfall ist die Lösung  $p = 0$  im Fall  $a = c$  und  $b = d$  zu betrachten. Ist auch noch  $a = b$ , so haben wir eine Raute, also auch ein Tangentenviereck. Im Fall  $a \neq b$  liegt jedoch ein Parallelogramm ohne In- und Ankreis vor. Um den Sachverhalt einfach ausdrücken zu können, heißt ein System von Diagonalenabschnitten *speziell*, wenn

$$a = c \neq b = d$$

gilt. Damit ist bewiesen:

**Satz.** *In jeder Klasse von konvexen Vierecken mit einem vorgegebenen nicht speziellen System von Diagonalenabschnitten gibt es genau ein Tangentenviereck.* *qed*

Die eindeutig bestimmte Lösung  $p$  der Gleichung (4) ist eine stetige Funktion<sup>3</sup>

$$p : \mathbb{R}_+^4 \longrightarrow ]-1, 1[.$$

Diese läßt sich explizit angeben. Durch mehrfaches Quadrieren erhält man aus der Gleichung (4) ein Polynom 4. Grades mit den Wurzeln

$$\begin{aligned} &1, \\ &-1, \\ p_1 &= \frac{(a-c)(d-b)}{2(ac+bd) + \sqrt{t}}, \\ p_2 &= \frac{(a-c)(d-b)}{2(ac+bd) - \sqrt{t}}, \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup> $\mathbb{R}_+^4 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a > 0, b > 0, c > 0, d > 0\}$

wobei  $t$  die Diskriminante einer quadratischen Gleichung mit den Wurzeln  $p_1$  und  $p_2$  bezeichnet, explizit:

$$t = 4 \cdot (ac(b^2 + d^2) + bd(a^2 + c^2) + (ac - bd)^2) + (a - c)^2(b - d)^2 = \quad (5)$$

$$= (ab - cd)^2 + (ad - bc)^2 + 2(ac(b - d)^2 + bd(a - c)^2) + 4(ac + bd)^2. \quad (6)$$

Aus den angegebenen Darstellungen von  $t$  entnimmt man sofort, daß  $t$  im Definitionsbereich immer positiv ist, also die in den Formeln für  $p_1$  und  $p_2$  auftretende Quadratwurzel immer gezogen werden kann. Ferner zeigt die Darstellung (5), daß  $p_1$  betragsmäßig immer kleiner als 1 und damit ein guter Kandidat für eine Darstellung der gesuchten Funktion ist.

Für diese Funktion kommen die Konstanten 1 und -1 sicher nicht in Frage, also bleibt noch  $p_2$  auszuschließen. Aus (6) folgt, daß der Nenner von  $p_2$  bei einem nicht speziellen System von Diagonalenabschnitten immer negativ ist, während der Nenner von  $p_1$  immer positiv ist. Für ein spezielles System von Diagonalenabschnitten, das heißt, auf der Menge

$$\{(a, b, a, b) \in \mathbb{R}_+^4 : a \neq b\}$$

ist  $p_2$  nicht definiert. Da die Zähler von  $p_1$  und  $p_2$  übereinstimmen, sind damit  $p_1$  und  $p_2$  entweder beide gleichzeitig 0 (es ergibt sich ein Drachen oder ein Parallelogramm) oder sie haben verschiedene Vorzeichen.

Die Teilmenge von  $\mathbb{R}_+^4$ , auf der  $p_1$  und  $p_2$  nicht verschwinden, zerfällt in vier Bereiche:

$$V_{ab} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}_+^4 : a < c, b < d\},$$

$$V_{ad} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}_+^4 : a < c, d < b\},$$

$$V_{cb} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}_+^4 : c < a, b < d\},$$

$$V_{cd} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}_+^4 : c < a, d < b\}.$$

Auf  $V_{ab}$  und  $V_{cd}$  nimmt  $p_1$  negative Werte an, auf den beiden anderen Bereichen positive Werte; nach dem bereits Gesagten verhält sich  $p_2$  umgekehrt. Weil die eindeutige Lösung der Gleichung (4) stetig von den Parametern  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  abhängt, kann jeweils nur eine der Funktionen  $p_1$  und  $p_2$  diese Lösung beschreiben. Für  $(a, b, c, d) \in V_{ab} \cup V_{cd}$  mit  $a + d = b + c$  hat  $p_2$  den Wert 1, ist also keine Lösung der Gleichung. Für  $(a, b, c, d) \in V_{ad} \cup V_{bc}$  mit  $a + b = c + d$  hat  $p_2$  den Wert -1 und ist ebenso keine Lösung. Damit bleibt nur  $p_1$  übrig: *Für jedes nicht spezielle System  $(a, b, c, d)$  von Diagonalenabschnitten ist  $\varphi = \arccos p_1$  der Schnittwinkel der Diagonalen, der ein Tangentenviereck erzeugt.*

Jedoch ist auch die Funktion  $p_2$  nicht ohne geometrische Bedeutung, jedenfalls in den Bereichen, in denen sie Werte mit einem Betrag kleiner als 1

annimmt, wo sie gerade die Ankreisvierecke beschreibt. Sucht man nämlich mit demselben Ansatz nach Ankreisvierecken, so stößt man auf dasselbe Polynom 4. Grades. Geometrisch sieht man unmittelbar, daß nur die Drachen sowohl einen Inkreis als auch einen Ankreis besitzen. Also gibt der Ausdruck für  $p_2$  die notwendige Bedingung für einen Ankreis. Hinreichend ist sie aber nur dann, wenn  $p_2$  einen Betrag kleiner 1 hat. Deswegen lohnt es sich, die Bereiche, in denen das eintritt, genauer zu beschreiben. Das soll hier nur für die Menge

$$V_{ab} \cap \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}_+^4 : p_2(a, b, c, d) < 1\}$$

durchgeführt werden, die drei anderen entsprechenden Mengen lassen sich analog behandeln. Zu den Randpunkten dieser Menge gehören jedenfalls die Hyperebenen  $a = c$ ,  $b = d$  und  $a + d = b + c$ , aber auch die Hyperfläche  $ad(b + c) = bc(a + d)$ . Genauer gilt für  $(a, b, c, d) \in V_{ab}$ :

$$p_2 < 1 \iff (a - b - c + d) \cdot (ad(b + c) - bc(a + d)) > 0.$$

Um eine genauere Vorstellung des zu untersuchenden Bereiches zu erhalten, kann man ohne wesentliche Einschränkung  $a = 1$  annehmen; jedes Viereck ist ja ähnlich zu einem Viereck mit dieser Eigenschaft. Dann ist die Menge

$$\{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 : 1 < c, 0 < b < d, (1 - b - c + d) \cdot (d(b + c) - bc(1 + d)) > 0\}$$

zu betrachten. Die Gleichung  $d(b + c) = bc(1 + d)$  beschreibt nun eine Fläche dritter Ordnung; ihr Schnitt mit der durch  $1 + d = b + c$  gegebenen Ebene ist eine Kurve 2. Ordnung, die der Gleichung  $d = bc$  genügt.

#### *Klassifikation nach Symmetrien*

Eine Klassifikation nach Symmetrien gibt es nur für die drei oberen Stockwerke des hier vorgestellten Hauses der Vierecke; sie ist wohlbekannt und hier nur der Vollständigkeit halber wiedergegeben (Abbildung 14).

#### *Dualitätsbetrachtungen*

Aus der Dreieckslehre kennt man die Dualität zwischen Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden, Umkreis und Inkreis. Entsprechend findet man eine Dualität in der Viereckslehre, genauer, zwischen Sehnenviereck und Tangentenviereck. Diese soll im folgenden an Nachweisen für die Sätze:

*Ein konvexes Viereck ist ein*

- *Sehnenviereck, wenn die Summe zweier Gegenwinkel gleich der Summe der beiden anderen Winkel ist, das heißt, wenn in der Standardbezeichnung (Abbildung 4) gilt:*

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta (= 180^\circ), \quad (7)$$

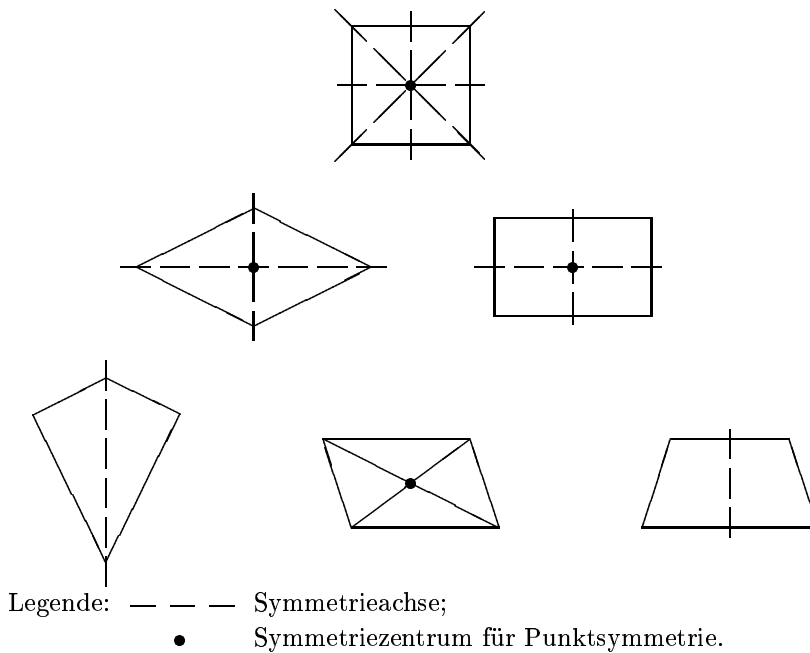


Abbildung 14: Klassifikation nach Symmetrien

- *Tangentenviereck, wenn die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen Seiten ist, das heißt, wenn gilt:*

$$a + c = b + d. \quad (8)$$

erläutert werden. Dabei steht in der klassischen Beweisvariante der schwache Außenwinkelsatz

*Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder nichtanliegende Innenwinkel.*

der Dreiecksungleichung

*Jede Dreiecksseite ist kleiner als die Summe der beiden anderen Seiten eines Dreiecks.*

gegenüber, in der modernen, auf Walter Karl Julius Lietzmann [Lietzmann 1966] zurückgehenden, der Umkreis eines Dreiecks dem Inkreis. Wir geben eine tabellarische Übersicht über diese Dualität, wobei wir vor allem das Prinzip herausarbeiten und auf technische Details verzichten. Wie viele Schlüsse in

der synthetischen Geometrie haben die folgenden Entwicklungen den Nachteil, daß man auf sehr viele Fallunterscheidungen achten muß.

Es werden die in der Einleitung eingeführten Bezeichnungen verwendet.

Es sei  $[ABCD]$  ein (positiv orientiertes) konvexes Viereck mit:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta (= 180^\circ).$$

Gesucht ist ein Umkreis, das heißt, ein Kreis, der alle vier Ecken des Vierecks enthält.

$$a + c = b + d.$$

Gesucht ist ein Inkreis, das heißt, ein Kreis, dessen Mittelpunkt im Viereck liegt und der alle vier Seiten berührt.

*Klassische Existenzbeweise:*

1. Da die Geraden  $AB$  und  $BC$  nicht parallel sind, schneiden sich die Mittelsenkrechten der Strecken  $[AB]$  und  $[BC]$  in einem Punkt  $M$

2. Der Punkt  $M$  hat gleichen Abstand  $r$  von den Punkten  $A$ ,  $B$  und  $C$ .

3. Der Kreis  $\mathcal{K}$  um  $M$  mit Radius  $r$  enthält die Ecken  $A$ ,  $B$  und  $C$ .

Es bleibt zu zeigen, daß  $\mathcal{K}$  den Punkt  $D$  enthält.

4. Wenigstens eine der Halbgeraden  $]AD$  und  $]CD$  hat einen Punkt mit dem Bogen von  $\mathcal{K}$  gemeinsam, der  $A$  und  $C$  verbindet, aber  $B$  nicht enthält.

1. Da das Viereck  $[ABCD]$  konvex ist, liegen die Ecken  $C$  und  $D$  auf der gleichen Seite der Geraden  $AB$  und die Winkelhalbierenden der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  schneiden sich in einem Punkt  $M$ , der auf derselben Seite der Geraden  $AB$  liegt.

2. Der Punkt  $M$  hat gleichen Abstand  $r$  von den Geraden  $DA$ ,  $AB$  und  $BC$ .

3. Der Kreis  $\mathcal{K}$  um  $M$  mit Radius  $r$  berührt die Geraden  $DA$ ,  $AB$  und  $BC$  in Punkten  $\tilde{D}$ ,  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ; der Berührungspunkt  $\tilde{A}$  ist ein innerer Punkt der Strecke  $[AB]$ .

Es bleibt zu zeigen, daß  $\mathcal{K}$  die Gerade  $CD$  berührt. Wie früher bemerkt, folgt aus der Tatsache, daß die Seite  $AB$  in einem inneren Punkt berührt wird, daß es sich um einen Inkreis und nicht um einen Ankreis handelt.

4. Der Kreis  $\mathcal{K}$  berührt wenigstens eine der Seiten  $AD$  und  $BC$  in einem inneren Punkt.



*Beweis.* Wir nehmen an, daß beide Halbgeraden keinen Punkt mit dem beschriebenen Kreisbogen gemeinsam haben, das heißt:

$$\sphericalangle CAD > \beta, \sphericalangle DCA > \beta$$

(Satz vom Sehnen tangentialen Winkel). Wegen der Winkelsumme im Dreieck gilt noch:

$$\sphericalangle BAC + \beta + \sphericalangle ACB = 180^\circ.$$

*Beweis.* Wir nehmen an, daß beide Berührungspunkte  $\tilde{D}$  und  $\tilde{B}$  nicht innere Punkte der Strecken  $[DA]$  und  $[BC]$  sind, das heißt:

$$d < \overline{\tilde{D}A}, b < \overline{\tilde{B}B}$$

Da die beiden Tangenten von einem Punkt an einen Kreis gleich lang sind, gilt noch:

$$\overline{\tilde{D}A} + \overline{\tilde{B}B} = \overline{AA} + \overline{AB} = a.$$

Damit berechnen wir:

$$\alpha + \gamma =$$

$$= \sphericalangle CAD + \sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle DCA > 180^\circ + \beta$$

im Widerspruch zu den Voraussetzungen:

$$\alpha + \gamma = 180^\circ. \quad \text{qed}$$

$$b + d < \overline{\tilde{B}B} + \overline{\tilde{D}A} = a$$

$$b + d = a + c > a. \quad \text{qed}$$

5. Ohne wesentliche Einschränkung können wir nun die Existenz eines Punktes  $\hat{D} \in \mathcal{K}$ , der auch auf der Halbgeraden  $]AD$  liegt,

einer Tangente  $t$  an  $\mathcal{K}$ , die die Ecke  $C$  enthält, aber von der Tangente  $BC$  verschieden ist, und die Halbgerade  $]AD$  in einem Punkt  $\hat{D}$  schneidet,

annehmen. Ist  $\hat{D} = D$ , so ist nichts mehr zu zeigen.

Es bleiben die Fälle  $\hat{D}$  zwischen  $A$  und  $D$ ,

$D$  zwischen  $A$  und  $\hat{D}$  auszuschließen.

6.  $[ABC\hat{D}]$  Sehnenviereck  $\Rightarrow$

$$\sphericalangle A\hat{D}C = 180^\circ - \beta = \delta.$$

6.  $[ABC\hat{D}]$  Tangentenviereck  $\Rightarrow$

$$a + \overline{C\hat{D}} = b + \overline{\hat{D}A}.$$

7a. Aus  $\hat{D} \in ]AD[$  würde folgen:

$\sphericalangle A\hat{D}C$  Außenwinkel von  $[D\hat{D}C]$ ,

$\delta$  nichtanliegender Innenwinkel (schwacher Außenwinkelsatz)

$\Rightarrow \sphericalangle A\hat{D}C > \delta$  Widerspruch!

$$d = \overline{D\hat{D}} + \overline{\hat{D}A}$$

$$\Rightarrow a + \overline{C\hat{D}} > a + c - \overline{D\hat{D}} =$$

(Dreiecksungleichung)

$$= b + d - \overline{D\hat{D}} = b + \overline{\hat{D}A} \text{ Widerspruch!}$$

$$\begin{array}{l|l}
7b. \text{ Aus } D \in ]AD\hat{D}[ \text{ würde folgen:} & \\
\delta \text{ Außenwinkel von } [D\hat{D}C], & \overline{\hat{D}A} = \overline{\hat{D}D} + d \\
\text{\textcircled{X}}A\hat{D}C \text{ nichtanliegender Innenwinkel} & \Rightarrow a + C\hat{D} < a + c + \overline{D\hat{D}} = \\
\text{(schwacher Außenwinkelsatz)} & \text{(Dreiecksungleichung)} \\
\Rightarrow \text{\textcircled{X}}A\hat{D}C < \delta \text{ Widerspruch!} & = b + d + \overline{D\hat{D}} = b + \overline{\hat{D}A} \text{ Widerspruch!} \\
& \text{qed}
\end{array}$$

Diese Beweise bedürfen noch einiger Erläuterungen.

Die positive Orientierung dient nur zur Vermeidung von Fallunterscheidungen in der Bezeichnung der Winkel, zum Beispiel im Beweis zu 4. links.

Die Zulässigkeit des Schlusses unter 3. rechts ergibt sich folgendermaßen. Wegen der Konvexität des Vierecks  $[ABCD]$  sind die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  beide kleiner als  $180^\circ$ . Damit hat das Dreieck  $[ABM]$  an den Ecken  $A$  und  $B$  spitze Winkel, nämlich  $\alpha/2$  und  $\beta/2$ . Also ist der Fußpunkt der Dreieckshöhe durch  $M$  ein innerer Punkt der Seite  $AB$ . Diese Dreieckshöhe hat aber gerade die Länge  $r$  und der Fußpunkt ist der Berührungspunkt  $\hat{A}$  des Kreises  $\mathcal{K}$ .

Mehr Begründung braucht die Annahme eines Schnittpunktes der Tangente  $t$  mit der Halbgeraden  $]AD$ . Sie hängt tatsächlich von der Wahl der Bezeichnungen ab. Wegen der Winkelsumme im Viereck gibt es immer zwei benachbarte Winkel mit einer Summe kleiner-gleich  $180^\circ$ . Die Bezeichnungen seien dann so gewählt, daß  $\alpha + \beta \leq 180^\circ$  gilt. Da die Tangente  $t$  von den Geraden  $AD$  und  $BC$  verschieden ist, berührt sie den Kreis  $\mathcal{K}$  in einem von  $\hat{B}$  und  $\hat{D}$  verschiedenen Punkt  $\tilde{C}$ ; sie hat sonst keinen Punkt mit dem Kreis  $\mathcal{K}$  gemeinsam. Die Sehne  $[\hat{B}\hat{D}]$  liegt, abgesehen von den Endpunkten, ganz im Inneren des Kreises  $\mathcal{K}$ , also hat sie keinen Punkt mit der Tangente  $t$  gemeinsam. Es sind nun wieder zwei Fälle zu unterscheiden

1.  $\alpha + \beta < 180^\circ$ : Die Halbgeraden  $]AD$  und  $]BC$  schneiden sich in einem Punkt  $E$ . Wegen der Konvexität des Vierecks  $[ABCD]$  sind die Ecken  $C$  und  $D$  innere Punkte der Strecken  $[BE]$  beziehungsweise  $[AE]$ . Die Ecke  $C$  ist ein innerer Punkt der Seite  $\tilde{B}E$  des Dreiecks  $[\tilde{D}\tilde{B}E]$ . Da die Gerade  $t$  die Ecke  $C$  enthält, muß sie nach dem Satz von Pasch noch eine Ecke oder einen inneren Punkt einer weiteren Seite des Dreiecks  $[\tilde{D}\tilde{B}E]$  enthalten. Dafür kommt aber nur noch ein innerer Punkt  $\hat{D}$  der Strecke  $[\tilde{D}E] \subset ]AD$  in Frage.
2.  $\alpha + \beta = 180^\circ$ : Die Halbgeraden  $]AD$  und  $]BC$  sind parallel und die Sehne  $[\hat{B}\hat{D}]$  ist ein Durchmesser des Kreises  $\mathcal{K}$ , senkrecht zu den Halbgeraden  $]AD$  und  $]BC$ . Der Winkel  $\text{\textcircled{X}}\tilde{C}\hat{B}\hat{D}$  ist kleiner als ein rechter Winkel

und damit schneidet die Halbgerade  $] \tilde{B}\tilde{C}$  die Halbgerade  $]AD$  in einem Punkt  $E$ , derart daß der Berührungspunkt  $\tilde{D}$  zwischen der Ecke  $A$  und dem Schnittpunkt  $E$  liegt. Der Berührungspunkt  $\tilde{C}$  ist ein innerer Punkt der Seite  $\tilde{B}\tilde{E}$  des Dreiecks  $[\tilde{D}\tilde{B}\tilde{E}]$ . Da die Gerade  $t$  den Berührungspunkt  $\tilde{C}$  enthält, muß sie nach dem Satz von Pasch noch eine Ecke oder einen inneren Punkt einer weiteren Seite des Dreiecks  $[\tilde{D}\tilde{B}\tilde{E}]$  enthalten. Dafür kommt wiederum nur noch ein innerer Punkt  $\hat{D}$  der Strecke  $[\tilde{D}E] \subset ]AD$  in Frage.

So zeigen die beiden angegebenen Beweise trotz ihrer formalen Ähnlichkeit ein gewisses Ungleichgewicht. In der rechten Spalte gibt es einige zusätzliche Schwierigkeiten durch Sonderfälle und Fallunterscheidungen. Bei dem folgenden Beweis, der für den Fall des Tangentenvierecks auf Lietzmann [l.c.] zurückgeht, ist es umgekehrt. Wir müssen zunächst einige Sonderfälle von Vierecken betrachten, bei denen die Summe von zwei Gegenwinkeln gleich der Summe der beiden anderen Winkel, also gleich  $180^\circ$  ist.

Zunächst sei angenommen, daß einer der Winkel – es sei  $\alpha$  – ein rechter Winkel ist. Dann ist wegen  $\alpha + \gamma = 180^\circ$  auch  $\gamma$  ein rechter Winkel. Damit liegen die Ecken  $A$  und  $C$  auf dem Thaleskreis über der Diagonalen  $BD$ . Also ist dieser Thaleskreis ein Umkreis des Vierecks  $[ABCD]$ .

Damit können für das Weitere die Vierecke ausgeschlossen werden, die einen rechten Winkel aufweisen. Von je zwei Gegenwinkeln ist dann immer einer kleiner als ein rechter Winkel. Wenn wir einen Winkel haben, der kleiner als ein rechter ist, dann ist auch einer seiner Nachbarwinkel kleiner als ein rechter. Also kann angenommen werden, daß in dem zu betrachtenden Viereck, für das ein Umkreis gesucht wird, zwei benachbarte Winkel kleiner als ein rechter Winkel sind. Dabei können die Bezeichnungen so gewählt werden, daß gilt:

$$\alpha, \delta < 90^\circ \quad (9)$$

und folglich

$$\beta, \gamma > 90^\circ.$$

Dann gilt natürlich auch

$$\alpha < \beta, \delta < \gamma. \quad (10)$$

Die entsprechenden Einschränkungen für Vierecke, in denen die Summe von zwei Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen Seiten ist, sind viel einfacher zu bekommen. Sind alle Seiten gleich lang, so liegt eine Raute vor, die offensichtlich einen Inkreis hat. Es kann also angenommen werden, daß zwei aneinander stoßende Seiten verschiedene Länge haben. Ist im Sinne der

Orientierung die erste die längere, so ist wegen der Summenbedingung von den Gegenseiten die zweite die längere. Also können die Bezeichnungen so gewählt werden, daß gilt:

$$a < b, \quad d < c. \quad (11)$$

Die weitere Argumentation unter Voraussetzung der Ungleichungen (9), (10) in der linken Spalte und (11) in der rechten wird nun wieder parallel geführt.

Existenzbeweise à la Lietzmann

<p>1. Auf der Halbgeraden <math>]AD</math> wird der Punkt <math>E</math> so gewählt, daß gilt:</p> <p style="text-align: center;"><math>\sphericalangle EBA = \alpha</math> (möglich wegen <math>\alpha &lt; 90^\circ</math>).</p> <p>2. Auf der Halbgeraden <math>]DA</math> wird der Punkt <math>F</math> so gewählt, daß gilt:</p> <p style="text-align: center;"><math>\sphericalangle DCF = \delta</math>. (möglich wegen <math>\delta &lt; 90^\circ</math>).</p> <p>3. Die Dreiecke <math>[ABE]</math> und <math>[CDF]</math> sind gleichwinklig<sup>4</sup>. Es sei nun angenommen, daß die Geraden <math>BE</math> und <math>CF</math> einen Punkt <math>G \neq E, F</math> gemeinsam haben.</p> <p>4. Das Dreieck <math>[BCG]</math> ist gleichwinklig.</p> <p>5. Die Innenwinkelhalbierenden des Dreiecks <math>[EFG]</math> sind die Mittelsenkrechten der Strecken <math>[AB]</math>, <math>[CD]</math> und <math>[BC]</math>.</p> <p>6. Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks <math>[EFG]</math> ist Mittelpunkt eines Umkreises des Vierecks <math>[ABCD]</math>.</p> <p>7. Das Viereck <math>[ABCD]</math> besitzt einen Umkreis.</p>	<p>1. In der Strecke <math>[BC]</math> wird der Punkt <math>E</math> so gewählt, daß gilt:</p> <p style="text-align: center;"><math>\overline{EB} = a</math>.</p> <p>2. In der Strecke <math>[DC]</math> wird der Punkt <math>F</math> so gewählt, daß gilt:</p> <p style="text-align: center;"><math>\overline{DF} = d</math>.</p> <p>3. Die Dreiecke <math>[EAB]</math> und <math>[AFD]</math> sind gleichschenkelig.</p> <p>4. Das Dreieck <math>[FEC]</math> ist gleichschenkelig.</p> <p>5. Die Mittelsenkrechten des Dreiecks <math>[AEF]</math> sind die Innenwinkelhalbierenden der Winkel <math>\gamma</math>, <math>\delta</math> und <math>\beta</math>.</p> <p>6. Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks <math>[AEF]</math> ist Mittelpunkt eines Inkreises des Vierecks <math>[ABCD]</math>.</p> <p>7. Das Viereck <math>[ABCD]</math> besitzt einen Inkreis.</p> <p style="text-align: center;"><i>qed</i></p>
--	---

Während der Beweis auf der rechten Seite ohne wenn und aber zum Ziel führt, sind auf der linken Seite Existenz und Eigenschaften des Punktes  $G$

<sup>4</sup>Ein Dreieck heißt *gleichwinklig*, wenn es zwei gleiche Winkel hat. Damit ist ein Dreieck genau dann gleichwinklig, wenn es gleichschenkelig ist. Wir verwenden den terminologischen Unterschied hier nur, um darauf hinzuweisen, daß die Begründung links über Winkel und rechts über Seiten erfolgt.

sehr kritisch. Im Fall  $\beta - \alpha = \gamma - \delta = 90^\circ$  sind nämlich die Geraden  $BE$  und  $CF$  parallel. Dann gibt es den Punkt  $G$  nicht und an Stelle der Winkelhalbierenden des Dreiecks  $[BCG]$  durch  $G$  tritt die Mittelparallele der Geraden  $BE$  und  $CF$ , das ist die Mittelsenkrechte zur Strecke  $[BC]$ . Die Mittelsenkrechten zu den Strecken  $[AB]$  und  $[CD]$  sind nun die Winkelhalbierenden der Winkel  $\sphericalangle AEB$  und  $\sphericalangle CFD$ , schneiden sich also auf der Mittelparallelen der beiden parallelen Schenkel. Dieser Schnittpunkt ist also wieder Mittelpunkt des gesuchten Umkreises.

Wenn die Geraden  $[BE]$  und  $[CF]$  einen Schnittpunkt  $G$  haben, so kann dieser immer noch mit einem der Punkte  $E$  oder  $F$  zusammenfallen, dann aber mit beiden. In diesem Fall hat man das Viereck in drei gleichwinklige Dreiecke zerlegt und es gilt:

$$\overline{GA} = \overline{EA} = \overline{EB} = \overline{GB} = \overline{GC} = \overline{FC} = \overline{FD} = \overline{GD},$$

das heißt, der Punkt  $G$  hat von allen vier Ecken des Vierecks gleichen Abstand, ist also Mittelpunkt des gesuchten Umkreises. Merkwürdig ist dabei, daß im Gegensatz zur Parallelität der Geraden  $BE$  und  $CF$  das Zusammenfallen der Punkte  $E$ ,  $F$  und  $G$  nicht allein von der Winkelverteilung abhängt, sondern neben der Grundgleichung (7) auch eine der folgenden äquivalenten Gleichungen erfüllt sein muß:

$$\begin{aligned} a &= d \cdot \cos \alpha, \\ c &= d \cdot \cos \delta. \end{aligned}$$

Schließlich sei noch überlegt, was passiert, wenn zwar die Ungleichungen (10), nicht aber die Ungleichungen (9) erfüllt sind. Aus den Ungleichungen (10) folgt wegen der Winkelsumme im nicht-überschlagenen Viereck, daß wenigstens einer der Winkel  $\alpha$  oder  $\delta$  kleiner als ein rechter Winkel sein muß. Man kann ohne wesentliche Einschränkung  $\alpha < 90^\circ < \delta$  annehmen. Dann ist auch  $\beta < 90^\circ$  und damit  $\alpha + \beta < 180^\circ$ . Also schneiden sich die Halbgerade  $]AD$  und  $]BC$  in einem Punkt  $H$ , derart daß  $D$  zwischen  $A$  und  $H$  liegt (sonst wäre das Viereck  $[ABCD]$  überschlagen). Wegen  $\alpha < \beta$  liegt auch  $E$  zwischen  $A$  und  $D$ , während es wegen  $\delta > 90^\circ$  auf der Halbgeraden  $]DA$  keinen Punkt  $F$  mit  $\sphericalangle DCF = \delta$  gibt. Vielmehr findet man auf der Halbgeraden  $]DH$  einen Punkt  $F$  mit  $\sphericalangle FCD = 180^\circ - \delta$ , und damit ist das Dreieck  $[DCF]$  gleichwinklig. Wegen

$$\sphericalangle HCD = 180^\circ - \gamma < 180^\circ - \delta = \sphericalangle FCD$$

liegt  $H$  zwischen  $D$  und  $F$ , damit auch zwischen  $E$  und  $F$ . Die Gerade  $CF$  trifft also die Seite  $EH$  des Dreiecks  $[EBH]$  in einem äußeren Punkt, nämlich  $F$ , während sie die Seite  $BH$  dieses Dreiecks in dem inneren Punkt  $C$  schneidet. Nach dem Satz von Pasch muß die Gerade  $CF$  deshalb die Seite  $BE$

in einem inneren Punkt  $G$  schneiden, kann also nicht parallel zu  $BE$  sein. Wegen der Gleichwinkligkeit der Dreiecke  $[ABE]$  und  $[BCG]$  sind nun die Mittelsenkrechten der Strecken  $[AB]$  und  $[BC]$  Außenwinkelhalbierende des Dreiecks  $[EGF]$ . Sie schneiden sich mit der Innenwinkelhalbierenden durch die Ecke  $F$  – das ist wegen der Gleichwinkligkeit des Dreiecks  $[DCF]$  die Mittelsenkrechte zur Strecke  $[CD]$  in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Ankreises des Dreiecks  $[EGF]$ , der die Dreiecksseite  $EG$  von außen berührt. Als Schnittpunkt von drei Mittelsenkrechten der Vierecksseiten ist dieser Ankreismittelpunkt auch Mittelpunkt eines Umkreises des Vierecks  $[ABCD]$  und damit ist noch einmal die Existenz des Umkreises bewiesen.

Zum Schluß sei durch ein Zitat begründet, warum man solche Überlegungen in der Mathematik überhaupt anstellt:

Diese Strukturzusammenhänge gewähren neben dem logischen einen ästhetischen Reiz. Wie denn ohne Zweifel die letzten Urgründe aller Ästhetik im Mathematischen liegen. Es würde dem Unterricht des Lesers zugute kommen, wenn es ihm gelänge, Mathematik auch als ästhetisches Phänomen zu erleben. [Breidenbach 1964]

#### Literatur:

- [Ahrens 1967] AHRENS, C.: Ein System der Vierecke, aus den Diagonalen entwickelt, Praxis der Mathematik 9 (1967), 179–184
- [Breidenbach 1964] W. BREIDENBACH: Raumlehre in der Volksschule, Hannover: <sup>7</sup>1964 (Hermann Schroedel)
- [Fritsch 1995] FRITSCH, R.: Ein axiomatischer Zugang zu einigen Winkelsätzen der ebenen Geometrie, Seiten 41–57 in: Schriften der Sudetendeutschen Akademie der Wissenschaften und Künste, Band 16, München: 1995 (Sudetendeutsche Akademie der Wissenschaften und Künste, Naturwissenschaftliche Klasse)
- [Gottschalk 1922] GOTTSCHALK A.: Zur Gruppierung der Vierecke, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 53 (1922), 259–260
- [Lietzmann 1966] LIETZMANN W.K.J.: Altes und Neues vom Kreis, Leipzig: <sup>4</sup>1966 (B.G. Teubner)
- [Malahovskij 1997] МАЛАХОВСКИЙ, Н. В. (МАЛАНОВСКИЙ, Н. В.): Вписанно-описанный четырёхугольник (Das Sehnentangentenviereck, russisch), unveröffentlichtes Manuskript, Königsberg 1997

- [Neubrand 1981] NEUBRAND, M.: Das Haus der Vierecke – Aspekte beim Finden mathematischer Begriffe, *Journal für Mathematikdidaktik* 2 (1981), 36–50
- [Volkert 1998] VOLKERT, K.: Das Haus der Vierecke – aber welches? – in Vorbereitung – Kurzfassung in: *Beiträge zum Mathematikunterricht 1998*, Hildesheim: 1998 (Franzbecker)
- [Zirkel 1963] ZIRKEL, W.: Das Ankreisviereck, *Praxis der Mathematik* 5 (1963), 129–132

Für weitere Literatur sei auf [Neubrand 1981] und [Volkert 1998] verwiesen.