Jürgen Flachsmeyer
Rudolf Fritsch
Hans-Christian Reichel (Hg.)

MATHEMATIK-INTERDISZIPLINÄR

Shaker Verlag
Aachen 2000

Tetraeder und Kugeln

Rudolf Fritsch, München

Meinem Freund Jürgen Flachsmeyer zum 65. Geburtstag gewidmet

In der ebenen Geometrie werden einem festen Dreieck verschiedene Kreise zugeordnet, wobei sich zahlreiche interessante Eigenschaften ergeben. Die wichtigsten dieser Kreise sind:

- der Umkreis mit Mittelpunkt O und Radius r;
- der Inkreis mit Mittelpunkt I und Radius ρ;
- die drei Ankreise mit den Mittelpunkten I_X und Radien ρ_X, $X \in \{A, B, C\}$;
- der Feuerbach–Kreis[1] mit Mittelpunkt F und Radius $r/2$, er ist der Umkreis des von den Mitten der Seiten des Dreiecks gebildeten Dreiecks, also das Bild des Umkreises unter der zentrischen Streckung mit dem Schwerpunkt Z als Zentrum und dem Faktor -1/2;
- der Spieker–Kreis[2] mit Mittelpunkt S und Radius $\rho/2$, er ist der Inkreis des Seitenmittendreiecks, also das Bild des Inkreises unter der zentrischen Streckung mit dem Schwerpunkt Z als Zentrum und dem Faktor -1/2.

Einige interessante Eigenschaften dieser Kreise seien genannt:

1. Die Geraden, die die Ecken des Dreiecks mit den Berührpunkten des Inkreises in den gegenüberliegenden Seiten verbinden, schneiden sich in einem Punkt, dem *Gergonne–Punkt*[3] G des Dreiecks.

2. Die Geraden, die die Ecken des Dreiecks mit den Berührpunkten der Ankreise in den gegenüberliegenden Seiten verbinden, schneiden sich in einem Punkt, dem *Nagel–Punkt*[4] N des Dreiecks.

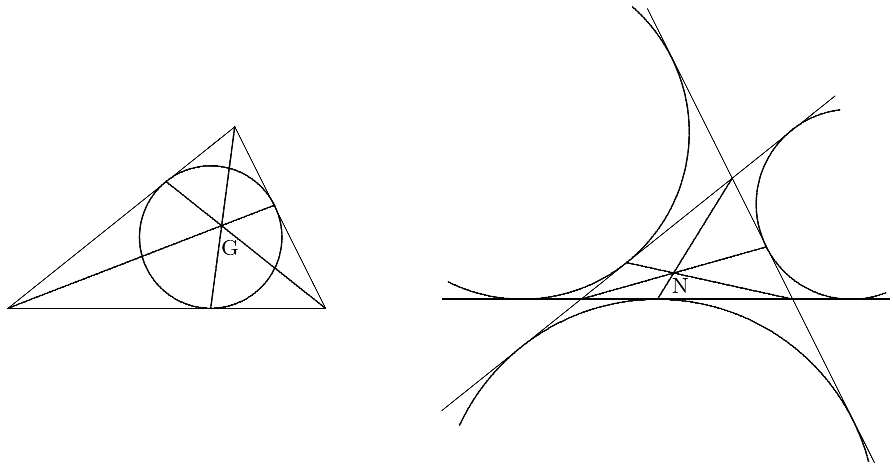
---

[1] Karl Wilhelm Feuerbach (1800–1834), Gymnasiallehrer in Erlangen und Hof. [11]

[2] Theodor Spieker (1823–1913), Gymnasiallehrer in Potsdam. Sein in vielen Auflagen erschienenes *Lehrbuch der ebenen Geometrie* war weit verbreitet; sogar eine Benutzung in Tsingtau wird berichtet.[12]

[3] Joseph Diaz Gergonne (1771–1859) Artillerie–Offizier, später Professor für transzendente Mathematik in Nimes und Professor für Astronomie in Montpellier. [3]

[4] Christoph Heinrich von Nagel (1803–1882), Gymnasiallehrer in Ulm.[1]



Gergonne–Punkt und Nagel–Punkt

3. [sc Feuerbach 1822] Der Feuerbach–Kreis eines nicht-rechtwinkligen Ausgangsdreiecks ist auch der Feuerbachkreis der drei Dreiecke, die vom Höhenschnittpunkt und jeweils zwei Ecken des Ausgangsdreiecks gebildet werden. Er berührt die Inkreise und die Ankreise dieser vier Dreiecke, also insgesamt 16 Kreise.

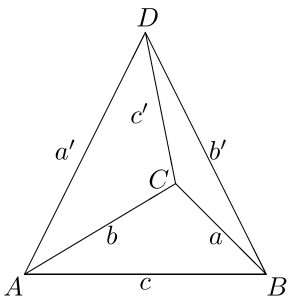
Die 16 Kreise, die der Feuerbach–Kreis berührt.

4. Der Mittelpunkt F des Feuerbach–Kreises ist der Mittelpunkt der Strecke, die den Umkreismittelpunkt O mit dem Höhenschnittpunkt H verbindet, das bedeutet, daß der Höhenschnittpunkt das äußere Ähnlichkeitszentrum zu Umkreis und Feuerbach–Kreis ist.

5. Der Mittelpunkt S des Spieker–Kreises ist der Kantenschwerpunkt des Dreiecks und der Mittelpunkt der Strecke, die den Nagelpunkt N mit dem Inkreismittelpunkt I verbindet, das bedeutet, daß der Nagel–Punkt das äußere Ähnlichkeitszentrum zu Inkreis und Spieker–Kreis ist.

Aber die Welt, in der wir leben, ist drei-dimensional, zum Verständnis der Umwelt ist es notwendig, sich mehr mit der Raumgeomtrie, der Geometrie des dreidimensionalen Raumes, zu beschäftigen. Die räumliche Elementargeometrie ist gegenwärtig ein Stiefkind der mathematischen Wissenschaften. Für die Schule gilt sie als zu schwer, vor allem zu zeitaufwendig, für die Hochschule als zu einfach und auch wieder als zu zeitraubend. Im folgenden soll zu einer Beschäftigung mit der Elementargeometrie des Raumes angeregt werden, die unabhängig von Schule und Hochschule ist. Man kann sich dafür von der Ebenen Geometrie leiten lassen, man kann versuchen, Erkenntnisse auf dem Wege der Analogiebildung von der Ebene in den Raum zu übertragen. Als Beispiel werden räumliche Analoga für die Kreise zum Dreieck skizzenhaft vorgestellt; Details finden sich in der Literatur, zum Beispiel in [6, 8, 9]. Die genannten Tatsachen erheben nur zu einem ganz geringen Teil Anspruch auf mathematische Neuheit; vieles ist in dem Klassiker von Nathan Altshiller Court [2] nachzulesen.

Ein Dreieck wird als ebene Konfiguration von drei Punkten gebildet, die nicht auf einer Geraden liegen. Das räumliche Analogon erhält man aus vier Punkten, die nicht in einer Ebene liegen.



Vier solche Punkte bestimmen ein Tetraeder [5]. Die vier erzeugenden Punkte sind die *Ecken* des Tetraeders. Die Verbindungsstrecken von je zwei Ecken sind die *Kanten* des Tetraeders. Es gibt sechs Kanten, die sich in drei Paare von *Gegenkanten* ordnen. Die üblichen Bezeichnungen für Ecken und Kanten beziehungsweise Kantenlängen zeigt die nebenstehende Figur. Durch die sechs Kantenlängen ist ein Tetraeder bis auf Kongruenz bestimmt.

Weiterhin hat ein Tetraeder vier *Seiten*, worunter man je nach Zusammenhang entweder die von je drei Ecken gebildeten Dreiecke, oder aber auch die von je drei Ecken aufgespannten Ebenen versteht. Durch die vier Seitenflächen ist ein Tetraeder nicht bis auf Kongruenz bestimmt, da ein Tetraeder sechs unabhängige Bestimmungsstücke oder Bedingungen braucht.

Gibt es nun Analoga zu den eingangs genannten, einem Dreieck zugeordneten Kreisen für Tetraeder? Wie können entsprechende Kugeln definiert werden?

Umkugel

Am einfachsten ist der Ansatz für die *Umkugel,* eine Kugel, deren Oberfläche die vier Ecken des Tetraeders enthält. Der Mittelpunkt ist ein Punkt, der von den vier Ecken gleichen Abstand hat. Im Raum ist der geometrische Ort für alle Punkte, die von den Endpunkten einer gegebenen Strecke gleichen Abstand haben, die mittelsenkrechte Ebene zu der Strecke. Die drei mittelsenkrechten Ebenen zu den von den drei von einer Ecke des Tetraeders ausgehenden Kanten schneiden sich in einem Punkt O mit der gewünschten Eigenschaft. Etwas schwieriger ist die Berechnung des Radius, er ergibt sich zu [13, S. 36]:

$$r = \frac{\sqrt{S(S-aa')(S-bb')(S-cc')}}{6v} \,,$$

wobei zur Abkürzung

$$S = \frac{aa' + bb' + cc'}{2}$$

gesetzt ist und v das Volumen des Tetraeders bezeichnet[5].

[5]Eine „Heronische Formel“ für Tetraeder zur Berechnung des Volumens aus den Kantenlängen findet man in [13, S. 33] oder [5].

Inkugel

Die Suche nach einer *Inkugel* verläuft nicht ganz so problemlos. Es ist nicht einmal *a priori* klar, was darunter zu verstehen ist. Der Inkreis berührt die Seiten des Dreiecks, welche Teile des Tetraeders soll die Inkugel berühren, die Kanten oder die Seiten(dreiecke)? Es hat sich durchgesetzt, unter der Inkugel eine Kugel zu verstehen, die bis auf singuläre Berührpunkte ganz im Inneren des Tetraeders liegt, das ist für eine Kugel, die alle Kanten des Tetraeders berührt nicht möglich. Also berührt die Inkugel, wenn es sie überhaupt gibt, die Seiten des Tetraeders. Der Mittelpunkt muß ein innerer Punkt des Tetraeders sein, der von allen vier Seiten gleichen Abstand hat. Damit liegt er auf passenden innenwinkelhalbierenden Ebenen, Ebenen, die den Innenwinkel zwischen zwei Seitenebenen des Tetraeders halbieren. Eine Seitenebene bildet mit den drei anderen drei solche innenwinkelhalbierende Ebenen, die sich in dem gesuchten Inkugelmittelpunkt I schneiden. Aber hier gilt eine Art Energieerhaltungssatz, die Schwierigkeit mit dem Inkugelmittelpunkt wird durch die leichte Berechnung des Radius ausgeglichen. Dazu bemerkt man, daß das ganze Tetraeder sich aus vier Teiltetradern, jeweils gebildet von drei Ecken und dem Inkugelmittelpunkt, zusammensetzt. Diese Teiltetrader haben alle die gleiche Höhe, den Inkugelradius ρ und jeweils eine Seite zur Basis. Daraus ergibt sich:

$$\rho = \frac{3v}{o}\,,$$

wobei o die Oberfläche des Tetraeders bezeichnet.
Im Zusammenhang mit der Inkugel stellt sich die Frage nach einem Gergonne–Punkt für Tetraeder: Sind die vier Geraden kopunktal, die die Ecken des Tetraeders mit den Berührpunkten der Inkugel in den jeweiligen Gegenseiten verbinden? Das ist nicht immer der Fall, sondern dann und nur dann, wenn gilt:

$$(1+\cos a)\cdot(1+\cos a') = (1+\cos b)\cdot(1+\cos b') = (1+\cos c)\cdot(1+\cos c')\,,$$

wobei $\cos x$ den Cosinus des an der Kante x anliegenden Kantenwinkels bezeichnet, für alle $x \in \{a, a', b, b', c, c'\}$. Dies wird in [4] unter Benutzung von Normalkoordinaten (trilinearen Koordinaten) bewiesen. Wünschenswert, aber nicht bekannt ist eine geometrische Interpretation dieser formalen Bedingung an die Kantenwinkel eines Tetraeders. Man kann sich fragen, ob es außer den regulären Tetraedern überhaupt Tetraeder gibt, die dieser Bedingung genügen. Aus Symmetriegründen tun es jedoch die regulären dreiseitigen Pyramiden, das heißt, Tetraeder, bei denen eine Seite ein gleichseitiges Dreieck ist und die nicht zu dieser Seite gehörenden Kanten gleiche Länge aufweisen.

Ankugeln

Zum Inkreis gehören die Ankreise. Wie steht es mit *Ankugeln* beim Tetraeder? Zunächst findet man vier Kugeln, von denen jede ein Seitendreieck von außen und die übrigen Seitenebenen in nicht zum Tetraeder gehörenden Punkten berührt. Die Mittelpunkte ergeben als Schnittpunkte der entsprechenden Außenwinkelhalbierenden Ebenen, die Radien lassen sich leicht berechnen. Bezeichnet I_A den Mittelpunkt der so definierten Ankugel, die das Dreieck BCD von außen berührt, so ist der Körper, der von den beiden Tetraedern $ABCD$ und $BCDI_A$ gebildet wird, auch die Vereinigung der Tetrader

$ABCI_A$, $ABDI_A$ und $ACDI_A$. Die vier Tetraeder mit der Ecke I_A als Spitze haben alle die gleiche Höhe, nämlich den Radius ρ_A der betrachteten Ankugel. Daraus ergibt sich

$$\rho_A = \frac{3v}{f_B + f_C + f_D - f_A},$$

wobei f_X, $X \in \{A, B, C, D\}$ den Flächeninhalt des der Ecke X gegenüberliegenden Seitendreiecks des Tetraeders bezeichnet. Verbindet man die Berührpunkte in den Seitendreiecken mit den gegenüberliegenden Ecken, so erhält man vier Geraden, die im Falle der Kopunktalität einen Nagel–Punkt definieren könnten. Kopunktalität liegt jedoch dann und nur dann vor, wenn gilt [4]:

$$(1 - \cos a) \cdot (1 - \cos a') = (1 - \cos b) \cdot (1 - \cos b') = (1 - \cos c) \cdot (1 - \cos c').$$

Auch für diese Bedingung wäre eine mehr geometrische Beschreibung wünschenswert. Die Frage nach den Ankugeln kann man aber auch anders auffassen. Die drei Trägergeraden der Seiten eines Dreiecks zerlegen die Ebene in sieben Flächenstücke, davon vier, die von Teilen aller drei Geraden berandet werden, ein beschränktes, das den Inkreis enthält, und drei unbeschränkte, in denen die Ankreise liegen. Die vier Seitenebenen eines Tetraeders zerlegen den Raum in fünzehn Raumstücke, davon elf, die von Teilen aller vier Ebenen berandet werden. Die Inkugel und die beschriebenen Ankugeln liegen in fünf von diesen Raumstücken und es stellt sich die Frage nach alle vier Seitenebenen berührenden Kugeln in den verbleibenden sechs Raumstücken mit der Form eines ins Unendliche reichenden Walmdaches, *Ankugeln zweiter Art.* Diese sechs Raumstücke enthalten jeweils eine Kante des Tetraeders in ihrem Rand. Es sei angenommen, daß eine solche Kugel mit Mittelpunkt I_{CD} und Radius ρ_{CD} in dem Raumstück liegt, dessen Rand die Kante $[CD]$ enthält. Dann ist der aus den Tetraedern $ABCD$, $ACDI_{CD}$ und $BCDI_{CD}$ gebildete Körper gleich der Vereinigung der Tetraeder $ABCI_{CD}$ und $ABDI_{CD}$, woraus

$$\rho_{CD} = \frac{3v}{F_C + F_D - F_A - F_B}$$

folgt. Daraus erkennt man, daß eine solche Kugel nur dann existieren kann, wenn

$$F_A + F_B < F_C + F_D$$

gilt. Ist das der Fall, so gibt es tatsächlich eine Ankugel zweiter Art in dem betrachtenten Raumstück, aber dieselbe Ungleichung liefert, daß es keine Ankugel zweiter Art in dem Raumstück geben kann, dessen Rand die Gegenkante $[AB]$ zur Kante $[CD]$ enthält. Also gibt es höchstens drei Ankugeln zweiter Art, beim regulären Tetraeder gar keine.

Kantenkugel

Die früher geführte Diskussion um die Definition der Inkugel legt es nun nahe, nach einer weiteren Kugel beim Tetraeder zu fragen, nach einer Kugel, die alle sechs Kanten des Tetraeders berührt, nach einer *Kantenkugel.* Eine solche Kugel schneidet die Seiten des Tetraeders in den Inkreisen, es folgt, daß sich die Inkreise paarweise berühren müssen. Dies gilt offensichtlich nicht für alle Tetraeder, sondern dann und nur dann, wenn

$$a + a' = b + b' = c + c'$$

gilt. Diese Bedingung ist auch hinreichend für die Existenz einer Kantenkugel, ein Tetraeder, das eine Kantenkugel besitzt, wird *Tangententetraeder* genannt. Solche Tetraeder wurden in der Vergangenheit ausführlich untersucht [8]; sie sind auch in der Elementarteilchenphysik von Bedeutung [7]. Man beachte die Analogie zwischen Umkugel und Kantenkugel, die sich daraus ergibt, daß die Umkugel die Seiten des Tetraeders in deren Umkreisen schneidet.

Feuerbach–Kugeln

Wie bei der Definition der Inkugel, so erschwert das Auseinanderfallen von Dimension 1 und Kodimension 1 im Raum die Suche nach einer Feuerbach–Kugel. Soll ihre Oberfläche die Kantenmitten oder die Seitenmitten enthalten? Im Fall der Kantenmitten gibt es eine solche Kugel nur für *orthozentrische* Tetraeder (Tetraeder mit Höhenschnittpunkt), das heißt, Tetraeder, die der Bedingung

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2$$

genügen; dabei ist der Schwerpunkt des Tetraeders der Mittelpunkt einer solchen Kugel, der *Feuerbach–Kugel erster Art;* für den Radius $\tilde{r}$ errechnet man leicht:

$$\tilde{r} = \sqrt{a^2 + a'^2} = \sqrt{b^2 + b'^2} = \sqrt{c^2 + c'^2}\,.$$

Diese Kugel schneidet die Seiten in deren Feuerbach–Kreisen.
Im Fall der Seitenmitten ist gar nicht klar, was man als Mittelpunkte von nicht gleichseitigen Dreiecken hernehmen sollte. Eine Anregung bietet die Beschreibung des Feuerbach–Kreises über die zentrische Streckung. Die zentrische Streckung mit dem Schwerpunkt Z des Tetraeders als Zentrum und dem Faktor -1/3 führt das Tetraeder in sein *Schwerpunkttetraeder* über, das von den Schwerpunkten der Seiten gebildet wird. Dieses besitzt immer eine Umkugel, die man als *Feuerbach–Kugel zweiter Art* definieren kann. Ihr Mittelpunkt F ergibt sich aus dem Umkugelmittelpunkt durch die zentrische Streckung mit dem Schwerpunkt Z als Zentrum und dem Faktor -1/3. Der Radius ist trivialerweise ein Drittel des Umkugelradius. Die Feuerbach–Kugel zweiter Art hat viele interessante Eigenschaften, analog zu Eigenschaften des Feuerbach–Kreises eines Dreiecks [6], aber über Berühreigenschaften bezüglich der Inkugel und der Ankugeln ist nur wenig bekannt.

Spieker–Kugeln

Ähnlich doppelsinnig stellt sich die Frage nach der Spieker–Kugel. Die sechs Kantenmitten bilden jedoch kein Tetraeder, sondern ein Oktaeder, und man kann fragen, ob dieses Oktaeder eine Inkugel besitzt. Die Seitenebenen dieses Oktaeders sind einmal die vier Seitenebenen des Tetraeders und dann die dazu parallelen Ebenen im Abstand der jeweils halben zugehörigen Höhe des Tetraders. Eine notwendige Bedingung für die Existenz einer *Spieker–Kugel erster Art* ist deshalb, daß die vier Höhen des Tetraeders gleich sind, was gleichbedeutend ist mit der Bedingung [10]:

$$(a - a')^2 + (b - b')^2 + (c - c')^2 = 0\,,$$

das heißt,

$$a = a' \wedge b = b' \wedge c = c'\,,$$

die *gleichschenklige* Tetraeder definiert [2, # 306]. Ist das der Fall, so hat der Schwerpunkt Z des Tetraeders offensichtlich gleichen Abstand von den Seitenebenen des Kantenmittenoktaeders, also existiert die gesuchte Kugel mit dem Schwerpunkt als Mittelpunkt. Eine langwierige, aber nicht schwierige Rechnung liefert den Radius $\tilde{\rho}$:

$$\tilde{\rho} = r \cdot \sqrt{\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}\,,$$

wobei r den Umkreisradius und α, β, γ die Winkel des Dreiecks ABC bezeichnen (in diesem Fall sind alle Seitendreiecke spitzwinklig und kongruent zueinander).
Die *Spieker–Kugel zweiter Art* läßt sich als die immer existierende Inkugel des Schwerpunkttetraeders definieren. Ihr Mittelpunkt S ergibt sich aus dem Inkugelmittelpunkt durch die zentrische Streckung mit dem Schwerpunkt Z als Zentrum und dem Faktor -1/3; er ist der Flächenschwerpunkt des Tetraeders [14]. Der Radius ist trivialerweise ein Drittel des Inkugelradius.
Fragt man nach einer Kugel, die die Seiten des Tetraeders in deren Spieker–Kreisen schneidet, so fällt die Antwort sehr dürftig aus: Nur beim regulären Tetraeder gibt es eine solche Kugel, ihr Mittelpunkt ist der Schwerpunkt und ihr Radius beträgt $a/4$, wobei a die Länge eine Kante bezeichnet [4].

Alternative Höhenschnittpunkte und Nagel–Punkte

In der Geometrie des ebenen Dreiecks sind der Höhenschnittpunkt und der Nagel–Punkt die äußeren Ähnlichkeitszentren zu Umkreis und Feuerbach–Kreis beziehungsweise zu Inkreis und Spieker–Kreis. Auch in der Raumgeometrie gibt es zu Umkugel und Feuerbach–Kugel zweiter Art beziehungsweise zu Inkugel und Spiekerkugel zweiter Art jeweils ein äußeres Ähnlichkeitszentrum. Im ersten Fall handelt es sich um den sogenannten *Punkt von Monge*, der im Fall eines orthozentrischen Tetraeders mit dem Höhenschnittpunkt zusammenfällt [9], während im zweiten Fall wohl nur bei regulären Pyramiden Übereinstimmung vorliegt.

Damit ist ein gewisser Abschluß zum Thema Kugeln und Tetraeder erricht. Die vorgeführten Gedankengänge mögen nun die Leser ermutigen, selbst Raumgeometrie zu entwickeln, indem sie nach anderen Analogien zwischen der ebenen und räumlichen Geometrie suchen.

Literatur

[1] P. Baptist: *Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie,* Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Band 19, Mannheim u.a.: 1992 (Bibliographisches Institut)

[2] N. A. Court: *Modern pure solid geometry,* New York: ^{2}1964 (Chelsea Publishing Company)

[3] *Dictionary of Scientific Biography,* Bände 1–18, C. C. Gillespie, ed. in chief, New York: 1970–90 (Scribner)

[4] R. Eddy und R. Fritsch: Some elementary geometry of the tetrahedron, in particular results obtained using homogenous coordinates, in Vorbereitung

[5] *Encyclopaedia of Mathematics,* Supplement #1, 466–469, edited by M. Hazewinkel, Dordrecht: 1997 (Kluwer Academic Publishers)

[6] R. Fritsch: Merkwürdige Kugeln am Tetraeder, *Didaktik der Mathematik* 11/1983, 262–269 und 12/1984, 18–35

[7] — : Energietetraeder?, *Mitteilungen aus dem mathematischen Seminar Gießen* 164/1984 (Coxeter Festschrift II), 151-177

[8] — : Kantenkugeln – geometrische Anwendungen der linearen Algebra, *Mathematische Semesterberichte* 32/1985, 84–109

[9] — : Vorschläge für Raumgeometrie in der Mittelstufe, *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* 39/1986, 339-348

[10] Y.-S. Kupitz und H. Martini: The Fermat-Torricelli point and isosceles tetrahedra, *Journal of Geometry* 49/1994, 150–162

[11] *Lexikon bedeutender Mathematiker,* herausgegeben von S. Gottwald, H.-J. Ilgauds und K.-H. Schlote, Leipzig: 1990 (VEB Bibliographisches Institut Leipzig)

[12] P. Otte: Nachruf Theodor Spieker, *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen* 45/1914, 194–198

[13] G. Salmon – O. W. Fiedler: *Analytische Geometrie des Raumes, Erster Teil: Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiter Ordnung,* unter Mitwirkung von A. Brill herausgegeben von K. Kommerell, Leipzig und Berlin: 1922 (Verlag und Druck von B. G. Teubner)

[14] K. Seebach: Über Schwerpunkte von Dreiecken, Vierecken und Tetraedern, *Didaktik der Mathematik* 11/1983, 270–282 und 12/1984, 36–44