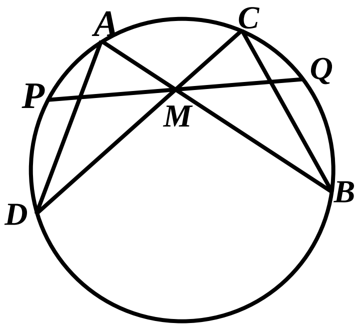
*Beiträge zum Mathematikunterricht 2003*
Hildesheim und Berlin: 2003 div Verlag Franzbecker
Seiten 221-224

Rudolf FRITSCH, München

# Bemerkungen zum Schmetterlingssatz

Laut Coxeter und Greitzer [3] hat William Horner (1786-1837), der Pate des Horner-Schemas zur Auswertung von Polynomen [10], im Jahr 1815 als erster einen elementargeometrischen Satz formuliert, der das Interesse zahlreicher Mathematiker erregt hat, den




**Schmetterlingssatz.** *Es sei M der Mittelpunkt einer Sehne [PQ] eines Kreises $\mathscr{K}$. Durch M seien noch zwei weitere Sehnen AB und CD gezogen mit A und C auf der gleichen Seite von der Geraden PQ. Die Sehne [PQ] werde von der Sehne [AD] im Punkt X geschnitten, von der Sehne [BC] im Punkt Y. Dann ist M auch der Mittelpunkt der Strecke [XY].*

In der Literatur finden sich zahlreiche Beweise [10], aber ich habe keinen gefunden, der komplexe Zahlen verwendet. Wie man ebene Geometrie mit komplexen Zahlen treiben kann, hat zum Beispiel N. Malachovskij beschrieben [5]. Dies bietet sich vor allem dann an, wenn ein Kreis wichtiger Bestandteil der zu untersuchenden Konfiguration ist. Wenn im Gymnasialunterricht überhaupt komplexe Zahlen behandelt werden, so ist der folgende Beweis des Schmetterlingssatzes eine schöne Anwendung, da nur elementarste Eigenschaften dieser Zahlen benutzt werden. Jeder Punkt wird dabei durch eine komplexe Zahl, seine komplexe *Koordinate*, beschrieben. Wir bezeichnen im folgenden die Koordinate eines Punktes $Z$ durch $z$.

Das Koordinatensystem aus komplexen Zahlen wird so gewählt, dass $\mathscr{K}$ der Einheitskreis und die Gerade $PQ$ parallel zur reellen Achse ist. Dann gilt für Punkte $Z \in \mathscr{K}$: $\bar{z} = z^{-1}$, die Koordinate $m$ von $M$ ist rein imaginär: $\overline{m} = -m$, und die Gerade $PQ$ hat die Gleichung $z - \bar{z} = 2m$.

Allgemein erhält man die Verbindungsgerade zweier verschiedener Punkte mit den Koordinaten $r$ und $s$ mit folgender Überlegung: Ein Punkt mit der Koordinate z liegt genau dann auf dieser Verbindungsgeraden, wenn $z - s$ ein reelles Vielfaches von $r - s$ ist, das heißt, wenn der Quotient $\dfrac{z-s}{r-s}$ reell, also $\dfrac{z-s}{r-s} = \dfrac{\bar{z}-\bar{s}}{\bar{r}-\bar{s}}$ ist, was zu der folgenden Gleichung führt:

$$(\bar{r} - \bar{s}) \cdot z + (s - r) \cdot \bar{z} = \bar{r} \cdot s - r \cdot \bar{s} \text{ . [5]}$$

Liegen die zu verbindenden Punkte auf dem Einheitskreis, so vereinfacht sich die Gleichung zu $z + r \cdot s \cdot \bar{z} = r + s$.

Die durch den Punkt *M* gezogenen Sehnen sind durch die Punkte *A* und *C* bestimmt. Damit müssen sich die Koordinaten von *B* und *D* durch die Koordinaten von *A*, *C* und *M* ausdrücken lassen. Setzen wir m in die Gleichung für die Gerade *AB* ein, so erhalten wir $m - a \cdot b \cdot m = a + b$, woraus sich

$$b = \frac{m - a}{1 + a \cdot m}, \text{ analog } d = \frac{m - c}{1 + c \cdot m}$$

ergibt. Nun folgt für $X \in AD \cap PQ$:

$$x = \frac{m + 2 \cdot a \cdot m^2 - a \cdot c \cdot m - c + a}{1 + (a + c) \cdot m - a \cdot c},$$

und die Vertauschung von *a* und *c* liefert

$$y = \frac{m + 2 \cdot c \cdot m^2 - a \cdot c \cdot m - a + c}{1 + (a + c) \cdot m - a \cdot c}.$$

Damit erhält man schließlich wie gewünscht:

$$\frac{x + y}{2} = m \qquad qed$$

Der Vorteil dieses Beweises, den man sich gut merken kann[1], liegt auch darin, dass einige naheliegende Verallgemeinerungen des Schmetterlingssatzes gleich mitbewiesen werden. Dazu benötigen wir den Begriff des *vollständigen Vierecks*, das aus vier Punkten, von denen keine drei kollinear sind, den *Ecken*, und den sechs Verbindungsgeraden von je zwei Ecken, den *Seiten* des Vierecks, besteht. Der Schmetterlingssatz macht eine Aussage über ein vollständiges Sehnenviereck *ABCD* und eine Gerade *g*, die zu keiner der sechs Vierecksseiten parallel ist und aus dem Umkreis eine Sehne [*PQ*] mit dem Mittelpunkt *M* ausschneidet. Bei dem vorgeführten Beweis kommt es nicht auf die Reihenfolge der Punkte *A*, *B*, *C*, *D* auf dem Einheitskreis an, die Voraussetzung, dass die Ecken *A* und *C* auf der gleichen Seite der Geraden *g* liegen, wird nicht benötigt. Damit können wir etwa *C* und *D* vertauschen und erhalten, dass *M auch der Mittelpunkt der Strecke [VW] mit* $V \in AC \cap g$ *und* $W \in BD \cap g$ *ist*. Weiter bemerken wir, dass die Koordinaten der Punkte *P* und *Q* in dem Beweis nicht explizit vorkommen. Benutzt wurde nur, dass der Punkt *M* der Fußpunkt des vom Umkreismittelpunkt auf die Gerade *g* gefällten Lotes ist. Damit braucht die Gerade *g* keine Sekante des Umkreises zu sein, man kann auch eine Tangente

[1] Dies behaupten zwar auch Coxeter und Greitzer von dem in [3] vorgeführten Beweis, was man aber anzweifeln kann.

oder Passante nehmen. Damit erhalten wir die folgende Verschärfung des Schmetterlingssatzes:

**Satz.** *Es seien ABCD ein Sehnenviereck und g eine Gerade, die zu keiner der sechs Seiten des Vierecks parallel ist. Schneidet sich ein Paar von Gegenseiten des Vierecks im Fußpunkt M des vom Umkreismittelpunkt auf die Gerade g gefällten Lotes, so ist der Punkt M der Mittelpunkt der von den beiden anderen Paaren von Gegenseiten aus der Gerade g ausgeschnittenen Strecken.*

Eine weitere, erstmals von John Sturgeon Mackay (1843-1914) im Jahr 1884 beschriebene Verallgemeinerung [4] (siehe auch [6]) ergibt sich durch eine geringfügige Variation unseres Beweises. Um die Aussage zu erhalten, betrachtet man den Punkt $M$ nicht als Schnittpunkt eines Paares von Gegenseiten, sondern als Mittelpunkt der von diesem Paar aus der Geraden $g$ ausgeschnittenen Strecke der Länge 0. Die Mackeysche Verallgemeinerung besagt nun, dass die Voraussetzung der Länge 0 überflüssig ist.

**Satz.** *Es seien ABCD ein Sehnenviereck und g eine Gerade, die zu keiner der sechs Seiten des Vierecks parallel ist. Ist der Fußpunkt M des vom Umkreismittelpunkt auf die Gerade g gefällten Lotes Mittelpunkt der von einem Paar von Gegenseiten des Vierecks ausgeschnittenen Strecke, so ist der Punkt M auch der Mittelpunkt der von den beiden anderen Paaren von Gegenseiten aus der Gerade g ausgeschnittenen Strecken.*

Zum Beweis bezeichnen wir mit $T$ und $U$ die Schnittpunkte der Geraden $AB$ beziehungsweise $CD$ mit $g$. Nun ist nicht notwendig $T = U = M$. Ist aber $M$ der Mittelpunkt der Strecke $[TU]$, so gilt:

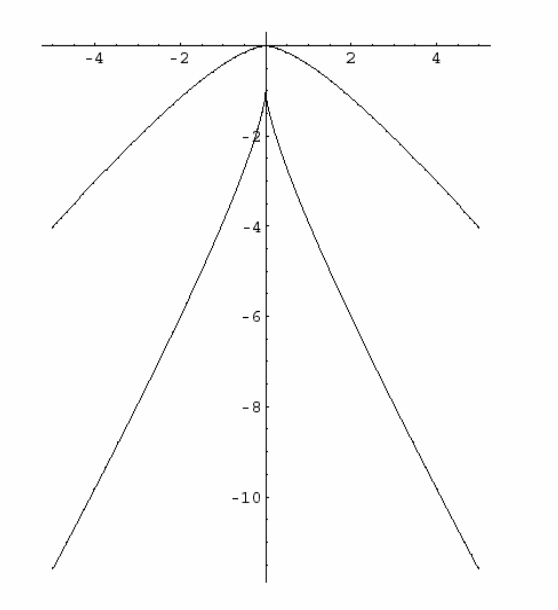
$$a + b + c + d + a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot (\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d} + 2m) = 2m.$$

Dieser Ausdruck ist invariant unter Vertauschungen von $a$, $b$, $c$, $d$ und daraus ergibt sich, dass M dann auch der Mittelpunkt der Strecken $[VW]$ und $[XY]$ ist. *qed*

Soweit kann man im Gymnasialunterricht unter Benutzung von komplexen Zahlen kommen. Damit ist aber die Mathematik im Umfeld des Schmetterlingssatzes noch nicht zu Ende. In [2] und [7] wird statt eines Sehnenvierecks ein einem Kegelschnitt einbeschriebenes Viereck betrachtet. Dabei ist in [2] die Gerade $g$ senkrecht zu einer Achse und der Punkt $M$ der Schnittpunkt von $g$ mit dieser Achse, in [7] ist $g$ eine beliebige Gerade und $M$ der Schnittpunkt mit dem zu $g$ konjugierten Durchmesser.

Dies legt es nahe, für ein gegebenes Viereck unabhängig von einem umschreibenden Kegelschnitt nach den Geraden zu fragen, die zu keiner der sechs Seiten parallel sind und aus denen von den Paaren von Gegenseiten drei Strecken mit gleichem Mittelpunkt ausgeschnitten werden. Als Beispiel betrachten wir das Drachenviereck mit den Ecken $A = (1|0)$, $B = (0|1)$, $C = (-1|0)$ und $D = (-2|0)$ in kartesischen Koordinaten. Die gesuchten Geraden bilden eine einparametrige Schar mit der nach [1] berechneten Einhüllenden

$$2(2x^2 - y^2)^2 + 20x^2y + 6y^3 + x^2 + 6y^2 + 2y.$$




Diese algebraische Kurve besitzt drei Singularitäten, eine Spitze in (0|-1) und die beiden komplexen Punkte $(\pm 3\boldsymbol{i}\sqrt{6}/16\,|\,1/8)$. Damit handelt es sich um eine rationale Kurve [8]. Zu ihren Tangenten gehören außer den gesuchten Geraden auch die sechs Seiten des Drachens. Eine mögliche rationale Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$\varphi(\lambda) = 4\frac{\lambda^3(1+\lambda)}{(\lambda^2 - 2\lambda - 1)^2},$$

$$\psi(\lambda) = -\frac{(3\lambda^2 + 2\lambda + 1)}{(\lambda^2 - 2\lambda - 1)^2}.$$

## Literatur


[1] E. Brieskorn und H. Knörrer: *Ebene algebraische Kurven*, Basel – Boston - Stuttgart: 1981

[2] Z. Čerin: A generalization of the butterfly theorem from circles to conics, *Mathematical Communications* **6** (2001), 161-164

[3] H. S. M. Coxeter und S. Greitzer: *Zeitlose Geometrie*, Stuttgart: 1983

[4] J. S. Mackay: *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 3 (1884/85), 38

[5] Н. В. Малаховский: *Метод комплексных чисел в Планиметрии*, Калининград: 1996

[6] V. Volenec: A generalization of the butterfly theorem, *Mathematical Communications* **5** (2000), 157-160

[7] V. Volenec: The butterfly theorem for conics, *Mathematical Communications* **7** (2002), 35-38

[8] R. J. Walker: *Algebraic Curves*, Princeton (New Jersey): 1950

[9] http://www.cut-the-knot.com/pythagoras/Butterfly.shtml

[10] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk./~history/Mathematicians/Horner.html