LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Rudolf Fritsch
Michael Khotyakov

Sommersemester 2011

Aufgaben für die Mathe-AG

6-8 Klasse

Die Aufgaben stammen aus den Büchern:

1. sost. S.V. Ivanov "Matematicheskij kruzhok" Sankt-Petersburg, 1993
2. sost. S.A. Genkin, I.V. Itenberg, D.V. Fomin "Matematicheskij kruzhok" Sankt-Petersburg, 1993
3. sost. R.A. Semizarov "Materiali Kirovskoj LMSch 2001 goda" Sankt-Petersburg, 2001
4. R. Smullyan "Kak zhe nazivaetsja eta kniga?" Sankt-Petersburg, 2008

Aus dem Russischen von Ulrike Bischoff und Michael Khotyakov.

Inhaltsverzeichnis

I.	Parität	3
II.	Das Schubfachprinzip (Dirichlet-Prinzip)	5
III.	Invarianten	7
IV.	Kombinatorik	10
V.	Mathematische Spiele I	12
VI.	Mathematische Spiele II	15
VII.	Graphentheorie	17
VIII.	Konstruktionen und Gewichtsbestimmung	19
IX.	Bedeckungen	21
X.	Logik I	23
XI.	Logik II	28
XII.	Zahlensysteme	31
XIII.	Induktion	33
XIV.	Teilbarkeit	35
XV.	Aufgaben mit Ziffern	37
XVI.	Diophantische Gleichungen	39

Kapitel I. Parität

1. Es gibt ein Gefüge aus 11 Zahnrädchen: das 1-te ist mit dem 2-ten verbunden, das 2-te mit dem 3-ten usw., das 11-te mit dem 1-ten. Kann das Gefüge rotieren?

2. Die Schnecke Marta kriecht auf einer Ebene mit konstanter Geschwindigkeit und dreht sich jede 15 Minuten um 90 Grad. Zeige, dass eine ganze Anzahl von Stunden vergehen muss, bis sie zum Ausgangspunkt zurückgekehrt ist!

3. Kann ein Grashüpfer in 25 Sprüngen zum Ausgangspunkt zurückkehren, wenn er wie folgt springt:

a. in eine beliebige Richtung eine Gerade entlang um eine ungerade Länge?

b. auf einer Ebene um die Länge 1 in eine der 4 Richtungen (oben, unten, links oder rechts)?

c. auf einer Ebene wie ein Springer im Schachspiel (d.h. die Diagonale eines 1*2-Rechteckes entlang)?

d. die Diagonale eines a*b-Rechteckes entlang (a und b sind fest)?

4. Ein Grashüpfer springt eine Gerade entlang: zuerst um 1cm, dann um 2cm usw. Kann er in 101 Sprüngen zum Ausgangspunkt zurückkehren?

5. Ist die Zahl 1+2+3+...+2010 gerade oder ungerade?

6. Ein Dominoset ist in einer Reihe ohne Fehler ausgelegt. An einem Ende steht «5». Was steht auf dem anderen?

7. In diesem Ausdruck $0 * 1 * 2 * ... * 9$ ersetzen die Sternchen entweder ein «+» oder ein «-».

a. Kann es gleich 0 sein?

b. Kann es gleich 1 sein?

c. Welche Zahlen sind überhaupt möglich?

8. Jedes Marsmännchen hat 3 Hände. Können sich 7 Marsmännchen einander an den Händen anfassen, so dass keine Hand übrig bleibt?

9. Das Produkt von 22 Zahlen «1» oder «-1» ist gleich 1. Zeige, dass die Summe der Zahlen nicht gleich 0 sein kann!

10. Auf dem 25*25-Brett liegen 25 Spielsteine so, dass sie symmetrisch in Relation zu den beiden Hauptdiagonalen angeordnet sind. Zeige, dass einer der Spielsteine sich genau im Zentrum befindet!

11. Ein 9*9-Brett ist in 9 Farben so ausgemalt, dass es von jeder Farbe gleich viele Kästchen gibt, und dass Bild diagonal symmetrisch ist. Zeige, dass die Kästchen auf der Diagonale in allen 9 Farben ausgemalt sind!

12. Auf dem Schachbrett stehen 8 Türme so, dass sie sich gegenseitig nicht schlagen können. Zeige, dass die Anzahl der Türme, die auf den schwarzen Feldern stehen, gerade ist!

13. In den Ecken eines Würfels stehen die Zahlen «1» oder «-1». Auf jeder Kante steht das Produkt der Zahlen aus den dazugehörigen Ecken. Kann die Summe von allen Zahlen gleich 0 sein?

14. Auf einem Kreis sind 4 Einzen und 5 Nullen niedergeschrieben. In jeder Runde schreibt man zwischen zwei gleichen Zahlen eine Eins und zwischen verschiedenen Zahlen eine Null, anschließend wischt man die alten Zahlen weg. Können irgendwann überall die gleichen Zahlen stehen?

15. In den Ecken eines n-Ecks stehen die Zahlen «1» oder «-1». Auf jeder Kante steht das Produkt der Zahlen aus den dazugehörigen Ecke. Die Summe der Zahlen auf den Kanten ist gleich 0. Zeige, dass:

a. n gerade ist.

b. n durch 4 teilbar ist!

Kapitel II. Das Schubfachprinzip (Dirichlet-Prinzip)

1. In einem Sack befinden sich sowohl weiße als auch schwarze Bälle. Wie viele Bälle müsste man mindestens ziehen, um mit geschlossenen Augen sicher zwei Bälle von der gleichen Farbe aus dem Sack zu bekommen?

2. Im Weißwald wachsen 1 Millionen Tannen heran. Jede Tanne hat höchstens 600.000 Nadeln. Zeige, dass es im Weißwald zwei Tannen gibt, die gleich viele Nadeln besitzen!

3. An einer Tafel sind 12 ganze Zahlen angeschrieben. Zeige, dass es zwei Zahlen gibt, deren Differenz durch 11 teilbar ist!

4. In München wohnen knapp 1,3 Millionen Menschen. Zeige, dass es zwei MünchnerInnen gibt, die genau gleich viele Haare besitzen. Merke, dass es keinen Menschen gibt, der mehr als 1 Millionen Haare auf dem Kopf hat!

5. Im Kurland gibt es n Fußballmannschaften (je 11 Spieler). Vom Flughafen aus wollen alle Spieler zur WM fliegen. Das Flugzeug ist 10-mal hin- und 10-mal zurueckgeflogen und hat bei jedem Mal n Spieler mitgenommen. Ein einzelner Spieler reiste mit dem Hubschrauber zur WM. Zeige, dass bereits mindestens eine Mannschaft bei der WM mitspielen kann!

6. Beweise, dass 2 Personen einer beliebigen 5-köpfigen Gruppe gleich viele Bekannte in dieser Gruppe haben!

7. In einem Quadrat mit einer Seitenlänge von einem Meter sind 51 Punkte eingezeichnet. Beweise, dass es drei Punkte unter ihnen gibt, die man mit einem 20cm*20cm-Quadrat abdecken kann.

8. In einem Fachbereich einer Fakultät arbeiten 7 Menschen, deren Alter zusammengerechnet 332 Jahre ist. Zeige, dass es unter ihnen drei Menschen gibt, die zusammen nicht jünger als 142 Jahre sind .

9. Zeige, dass es zwei Zweierpotenzen gibt, deren Differenz durch 2011 teilbar ist!

10. Zeige, dass es eine Zahl 11...1 gibt, die durch 2011 teilbar ist!

11. 100 Männer sitzen an einem runden Tisch. 51 von diesen Männern haben eine Glatze. Zeige, dass genau zwei Glatzköpfe einander gegenüber sitzen.

12. Die Zahlen 1,2,...,9 sind in 3 Gruppen eingeteilt. Zeige, dass in einer Gruppe das Produkt der Zahlen nicht kleiner als 72 ist!

13. Eine 10*10-Tabelle hat 100 Felder. Jedes Feld ist mit einer ganzen Zahl besetzt. Die Differenz zwischen 2 beliebigen benachbarten Zahlen beträgt nicht mehr als 5. Beweise, dass sich unter diesen genau zwei gleiche Zahlen befinden!

14. Beweise, dass es in jeder möglichen Gruppe aus 6 Menschen immer 3 Leute gibt, die sich unter einander entweder alle kennen oder gar nicht kennen.

15. 5 Punkte sind in den Schnittpunkten der Linien eines karierten Feldes beliebig eingezeichnet. Beweise, dass die Mitte einer Strecke zwischen zwei dieser eingezeichneten Punkte sich ebenfalls auf einem Schnittpunkt befindet!

16. An der Tafel sind 10 natürliche Zahlen angeschrieben. Zeige, dass man manche der Zahlen so addieren kann, dass die Summe durch 10 teilbar ist!

Kapitel III. Invarianten

1. Ein Aufzug in einem 100-stöckigen Haus hat nur zwei Knöpfe: «6 Stockwerke herauf» und «4 Stockwerke herunter». Zeige, dass nicht jedes Stockwerk mit diesem Aufzug zu erreichen ist!

2. Superman zerreißt aus lauter Kraftüberschuss eine Wandzeitung. Kann er irgendwann genau auf 2010 einzelne Zeitungsstücke kommen, wenn er einen beliebigen Zeitungsfetzen

a. immer wieder in genau 4 Teile zerstückelt?

b. immer wieder entweder in 4 oder 10 Teile zerstückelt?

3. In jedem Feld einer 3*3-Tabelle steht am Anfang eine 0. Man kann zu jedem Feld eines beliebigen 2*2-Quadrates in der Tabelle eine 1 addieren. Könnte auf diese Weise irgendwann die folgende Tabelle entstehen?

4	9	5
10	18	12
6	13	7

4. In einer Ecke eines Würfels steht eine 1, in den anderen eine 0. Nun kann man zu den beiden Zahlen, die zu einer Kante gehören, jeweils eine 1 hinzuaddieren. Schafft man es auf diese Weise, dass alle Zahlen

a. gerade werden?

b. durch 3 teilbar werden?

5. Ein Kreis ist in 6 Abschnitte geteilt. In jedem Abschnitt liegt ein Hering. Bei jedem Durchgang schiebt man einen Hering in einen benachbarten Abschnitt. Schafft man es nach genau 20 Durchgängen alle Heringe in einen Abschnitt zusammen zu bekommen?

6. Die Zahlen von 1 bis 100 stehen in einer Reihe nebeneinander. In jedem Durchgang tauscht man immer zwei beliebige Zahlen dieser Reihe miteinander aus, zwischen denen eine dritte Zahl steht. Kann man auf diese Weise die umgekehrte Zahlenfolge von 100 bis 1 erhalten?

7. Zu einer Zahl addiert man die Summe ihrer Ziffern. Kann man von 1 aus angefangen auf die Zahl 123456 kommen?

8. Auf einem Tisch stehen 50 Becher. Die Hälfte von ihnen steht umgedreht auf dem Tisch. Können irgendwann alle Becher richtig herum gestellt sein, wenn man jedes Mal immer 4 Becher gleichzeitig umdreht?

9. Auf einer Tafel stehen die Zahlen von 1 bis 20. Zwei beliebige Zahlen x und y kann man durch $x + y + 5xy$ ersetzen. Ist die Zahl 20102011 auf diese Weise erreichbar?

10. In jedem Durchgang setzt man eine Schachfigur in die gegenüberliegende Ecke eines 1xn- Rechteckes (z.B. entspricht der Zug eines Springers einem 1*2-Rechteck). Für welches n gilt, dass die Schachfigur von jedem beliebigen Feld aus jedes andere beliebige Feld eines unendlich großen Spielbrettes erreichen kann?

11. Auf der Tafel stehen die Zahlen von 1 bis 20. Jedes Zahlenpaar (x, y) ersetzt man durch $x + y + xy$. Welche Zahl steht nach 19 Durchgängen am Ende auf der Tafel?

12. Auf einem Kreisumfang stehen 3 Zahlen. In jedem Durchgang schreibt man zwischen jeweils zwei Zahlen den Betrag ihrer Differenz und wischt daraufhin die alten Zahlen weg. Könnten nach 100 Durchgängen folgende Zahlen auf dem Kreis stehen?

a. 60, 70, 150

b. 60, 70, 130

13. Auf einer Tafel steht «2, 2, 2». Die Zahlen a, b, c ersetzt man durch $a, b, a + b - 1$.

a. Kommt man auf diese Weise auf die Zahlenkombination «11, 201, 2011»?

b. Welche Zahlenkombinationen sind möglich?

14.1 In einem 4*4-Quadrat ist das Feld a2 schwarz ausgemalt, alle anderen Felder sind weiß. In jedem Durchgang ändert man die Farbe in allen Feldern einer beliebigen Zeile, einer Spalte oder einer Diagonale. Beweise, dass es unmöglich ist, auf diese Weise ein ganz weißes Quadrat zu erhalten!

14.2 Beweise dies auch für ein 8*8-Quadrat!

15. In einer Stadt ist nur ein dreifacher Wohnungstausch gestattet, d.h. A tritt seine Wohnung an B ab, B an C und C an A. Kann auch ein zweifacher Wohnungstausch vollzogen werden?

16. Drei Grashüpfer üben das Bockspringen. Am Anfang sitzen sie auf folgenden Punkten mit den Koordinaten (0,0); (0,1); (1,0). Jede Sekunde springt einer der Grashüpfer immer auf einen anderen Punkt. Der nächste Punkt muss sich symmetrisch im Verhältnis zu dem Ausgangspunkt eines anderen Grashüpfers befinden. Können die Grashüpfer auf diese Weise folgende Punkte erreichen:

a. (0,1); (1,0); (1,1)?

b. $(x, y); (x + 1, y + 1); (x + z, y)$?

c. $(x, y); (x + 3, y); (x, y + 3)$?

17. Jetzt üben 4 Grashüpfer das Simultanspringen und sitzen am Anfang auf folgenden Punkten (0,0); (0,1); (1,1). Können sie die Punkte $(x, y); (x+1, y+1); (x+3, y); (x+2, y\breve{\ }1)$ erspringen?

18. 239 Autos fuhren den ganzen Tag auf dem Kreisel um die Siegessäule in Berlin immer in die gleiche Richtung. Am Abend standen sie alle wieder auf dem selben Platz, von dem aus sie am Morgen gestartet waren. Zeige, dass an diesem Tag die Anzahl an Überholungen gerade war.

Kapitel IV. Kombinatorik

1. Im Laden «Verrückter Schuhmacher» gibt es 5 verschiedene linke Schuhen und 3 verschiedene rechte Schuhen. Wie viele Möglichkeiten gibt es sich ein Paar Schuhe zu kaufen?

2. Beim «Verrückten Schuhmacher» gibt es auch 4 verschiedene Sorten an Krawatten. Wie viele Möglichkeiten gibt es sich ein Paar Schuhe mit einer Krawatte zu kaufen?

3. Im Wunderland gibt es 3 Städte: A, B und C. Von A nach B führen 4 Straßen und von B nach C genau 6. Wie viele Möglichkeiten gibt es von A nach C zu fahren?

4. Alice hat im Wunderland noch eine weitere Stadt D gegründet. Alice hat 2 Straßen von A nach D und zwei von D nach C bauen lassen. Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt von A nach C zu reisen?

5. Wir bezeichnen eine natürliche Zahl als «sympathisch», wenn sie nur ungerade Ziffern enthält. Wie viele vierstellige «sympathische» Zahlen gibt es?

6. Jedes Feld eines einer 2*2 -Tabelle kann entweder weiß oder schwarz bemalt werden. Wie viele unterschiedliche Tabellen können auf diese Weise entstehen?

7. In einer Fußballmannschaft müssen ein Kapitän und sein Stellvertreter gewählt werden. Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es dies zu tun?

8. Wie viele Möglichkeiten gibt es zwei Türme auf ein Schachbrett zu setzen, ohne dass sie dabei einander schlagen?

9. Jedes Wort ist eine beliebige Aneinanderreihung deutscher Buchstaben. Wie viele Wörter kann man aus jedem der nachfolgenden Wörter zusammenbasteln:

a. Zahl

b. Vektor

c. Mathematik

d. Mississippi?

10. In einem Land gibt es 20 Städte. Jeweils 2 Städte sind mit einer Fluglinie verbunden. Wie viele Fluglinien gibt es insgesamt in diesem Land?

11. Wie viele Diagonalen gibt es in einem konvexen n-Eck?

12. Das Alphabet des Volksstammes Bum-Bum enthält 6 Buchstaben. Ein Wort in der Bum-Bum'schen Stammessprache besteht immer aus 6 Buchstaben, so dass zumindest 1 Buchstabe mehr als einmal vorkommt. Wie groß ist der Bum-Bum'sche Wortschatz?

13. Auf dem Regal stehen 5 Bücher. Wie viele verschiedene Stapel kann ich mit diesen Büchern bilden? (Ein Stapel kann auch nur ein Buch enthalten!)

14. Wie viele Möglichkeiten gibt es acht Türme auf ein Schachbrett zu setzen, ohne dass sie dabei einander schlagen?

15. In der Tanzschule «Einsame Herzen» werden n Frauen und n Männer unterrichtet. Wie viele Runden müssen sie tanzen bis es nicht mehr möglich ist sich eine neue Kombination von Paaren auszudenken?

16. Sieben Studenten wohnen in Berlin in einer WG mit 3 Zimmern: ein Einzelzimmer, ein Doppelzimmer und ein 4-Mann-Zimmer. Wie viele Möglichkeiten haben sie sich auf die Zimmer aufzuteilen?

17. Wie viele zehnstellige Zahlen gibt es, in denen zumindest eine Ziffer mehr als einmal vorkommt?

18. Man würfelt dreimal. Wie viele mögliche Kombinationen können auftreten, in denen mindestens eine «6» vorkommt?

19. Wie viele Möglichkeiten gibt es 14 Menschen paarweise aufzuteilen?

Kapitel V. Mathematische Spiele I

Einführung

1. Zwei Spieler brechen abwechselnd Stücke entlang der eingetäfelten Kammern einer Schokoladentafel (6*8) ab. Die Schokoladenstücke können dabei unterschiedlich groß ausfallen. Derjenige, dem am Ende kein Schokoladenstück zum Abbrechen übrig bleibt, hat verloren.

2. In einem Spiel gibt es 3 Haufen zu jeweils 10, 15 und 20 Steinen. In jeder Spielrunde teilt man einen beliebigen Haufen in zwei kleinere. Derjenige, dem am Ende nur ein Stein zum Aufteilen übrig bleibt, hat verloren.

3. Die Zahlen 1 bis 20 sind in einer Reihe aufgeschrieben. Zwei Spieler setzen abwechselnd entweder ein «+» oder ein «-» zwischen zwei beliebige Zahlen aus der Reihe. Am Ende wird das Ergebnis der so entstandenen Zahlenreihen zusammengerechnet. Ist das Ergebnis eine gerade Zahl, gewinnt Spieler 1; ist sie ungerade, so Spieler 2.

4. Zwei Spieler setzen abwechselnd die Türme so auf ein Schachbrett, dass diese sich gegenseitig nicht schlagen können. Derjenige, dessen Turm am Ende zuerst geschlagen wird, muss sich selbst geschlagen geben.

5. Auf einer Tafel ist 10-mal die Ziffer «1» und 10-mal die Ziffer «2» aufgeschrieben. In jeder Spielrunde wischt man jeweils zwei Zahlen von der Tafel und schreibt eine neue hinzu: hat man 2 gleiche Zahlen weggewischt, notiert man eine «2», waren sie verschieden, so eine «1». Steht am Ende nur noch eine «1», gewinnt Spieler 1, wenn nicht, dann Spieler 2.

6. Auf einer Tafel sind zwei Zahlen aufgeschrieben: «25» und «36». In jeder Spielrunde errechnet man die Differenz zweier beliebiger Zahlen an der Tafel und schreibt diese hinzu. Es verliert derjenige, dessen errechnete Differenz bereits an der Tafel steht.

7. Es gibt 3 karierte Täfelchen mit folgenden Größen

a. 9*10

b. 10*12

c. 9*11

In jeder Spielrunde streicht man entweder eine horizontale oder eine vertikale Linie eines Karokästchens an. Derjenige, dem keine Linie zum Anstreichen mehr übrig bleibt, hat verloren.

Symmetrische Strategien

8. Zwei Spieler legen abwechselnd immer eine Münze auf einen runden Tisch. Wer keinen Platz mehr für seine Münze hat, verliert.

9. Zwei Spieler setzen abwechselnd die Läufer so auf ein Schachbrett, dass diese sich gegenseitig nicht schlagen können. Derjenige, dessen Läufer zuerst geschlagen wird, muss sich selbst geschlagen geben.

10. Es gibt 2 Häufchen mit jeweils 7 Steinen. In einer Spielrunde nimmt man beliebig viele Steine aus einem der beiden Häufchen. Derjenige, der einen leeren Haufen vor sich hat, hat verloren.

11. Zwei Spieler setzen abwechselnd die Springer so auf ein Schachbrett, dass diese sich gegenseitig nicht schlagen können. Derjenige, dessen Springer nicht mehr zum Zuge kommt, hat verloren.

12. Zwei Spieler setzen abwechselnd die Könige so auf ein vergrößertes Schachbrett (9*9), dass diese sich einander nicht schlagen können. Wer keinen Platz mehr für seinen König hat, hat verloren.

13. In jeder Spielrunde kann man mit einem Dominostein 2 Felder eines 10*10-großen Spielbrettes abdecken. Derjenige, der keinen Platz mehr für seinen Dominostein findet, hat verloren.

14. In einem Spiel gibt es zwei Haufen zu jeweils 30 und 20 Steinen. In jeder Runde nimmt man beliebig viele Steine aus einem der beiden Haufen. Derjenige, der einen leeren Haufen vor sich findet, hat verloren.

15. Auf einem Kreis liegen 20 Punkte. In jeder Spielrunde verbindet man zwei dieser Punkte miteinander. Die so entstandenen Strecken dürfen sich nicht kreuzen. Derjenige, dessen Strecke eine andere berührt, hat verloren.

16. In einem Spiel gibt es eine Kamille mit

a. 11

b. 12

Blütenblättern. In jeder Runde darf man entweder ein Blatt oder zwei nebeneinander wachsende Blätter abreißen. Derjenige, dem kein Blatt zum Abreißen übrig bleibt, hat verloren.

17. In einem Spiel gibt es folgende Quader:

a. 4*4*4

b. 4*4*3

c. 4*3*3

In jeder Runde sticht man eine beliebige Reihe durch, wenn sie noch nicht komplett durchgestochen ist. Wer keinen Zug mehr hat, hat verloren.

18. Zwei Spieler brechen abwechselnd Stücke entlang der eingetäfelten Kammern einer 5*10-Schokoladentafel ab. Die Schokoladenstücke können dabei unterschiedlich groß ausfallen. Derjenige, dem es gelingt, zuerst ein ganzes 1*1 Stück zu bekommen, hat gewonnen.

Kapitel VI. Mathematische Spiele II

Siegreiche Positionen

1. Der Turm steht auf dem Feld a1. In einem Zug versetzt man ihn nach oben oder nach rechts um beliebig viele Felder. Wer den Turm auf das Feld h8 stellt, gewinnt.

2. Der König steht auf dem Feld a1. In einem Zug versetzt man ihn nach oben oder nach rechts oder nach oben und rechts gleichzeitig, jeweils um ein Feld. Wer den König auf das Feld h8 stellt, gewinnt.

3. Es gibt zwei Haufen Pralinen: mit 20 und 21 Stück. In einem Zug isst man alle Pralinen von einem Haufen, und teilt die übrigen in zwei kleineren Haufen, nicht unbedingt gleichen. Wer keinen Zug mehr hat, verliert.

4. In einer Schachtel befinden sich 300 Streichhölzer. In einem Zug nimmt man nicht mehr als die Hälfte Streichhölzer. Wer nichts mehr zu nehmen hat, verliert.

5. Es gibt drei Haufen mit 50, 60 und 70 Steine. In einem Zug teilt man jeden Haufen, der mehr als einen Stein enthält in zwei andere. Wer nichts mehr zu teilen hat, verliert.

6. Man fängt mit 60 an und substrahiert abwechselnd von der vorhandenen Zahl einen seinen Teiler. Wer 0 bekommt, verliert.

7. Es gibt zwei Haufen Streichhölzer:

a. mit 101 und 201 Stück

b. mit 100 und 201 Stück

In einem Zug entnimmt man von einem Haufen so eine Anzahl an Streichhölzer, die ein Teiler von der Anzahl der Streichhölzer im anderen Haufen ist. Wer den letzten Streichhölzer entnimmt, gewinnt.

Rückwärtige Analyse

8. Die Dame steht auf dem Feld c1. In einem Zug versetzt man sie nach oben oder nach rechts oder nach oben und rechts gleichzeitig, jeweils um beliebig viele Felder. Wer die Dame auf das Feld h8 stellt, gewinnt.

9. Es gibt zwei Haufen Steine: mit 5 und 7 Stück. In einem Zug entnimmt man entweder beliebig viele Steine aus einem Haufen oder gleich (auch beliebig) viele Steine aus beiden Haufen. Wer keinen Zug mehr hat, verliert.

10. Der Springer steht auf dem Feld a1. In einem Zug versetzt man ihn um zwei Felder nach rechts und um ein - entweder nach oben oder nach unten, oder um zwei Felder nach oben und um ein - entweder nach rechts oder nach links . Wer keinen Zug mehr hat, verliert.

11.1 Es gibt zwei Haufen mit jeweils 7 Steinen. In einem Zug nimmt man einen Stein aus einem Haufen oder jeweils einen Stein. Wer nichts mehr zu nehmen hat, verliert.

11.2 Aufgabe 11.1. Dazu kann man auch einen Stein von einem Haufen in den anderen verlegen.

12. Man fängt mit 0 an und addiert dazu abwechselnd eine beliebige Zahl von 1 bis 9. Wer 100 bekommt, gewinnt.

13. Man fängt mit 1 an und multipliziert abwechselnd die vorhandene Zahl mit einer beliebigen Zahl von 2 bis 9. Wer als Erste eine Zahl größer 1000 bekommt, gewinnt.

14. Man fängt mit 2 an und addiert abwechselnd zur vorhandenen Zahl eine natürliche Zahl, die kleiner ist. Wer 1000 bekommt, gewinnt.

15. Man fängt mit 1000 an und substrahiert abwechselnd eine beliebige Zweierpotenz. Wer 0 bekommt, gewinnt. Vergiß nicht, dass $1 = 2^0$.

Kapitel VII. Graphentheorie

Einführung

1. Zwischen 8 Planeten des Sonnensystems verkehrt eine Raumfahrtverbindung, dabei fliegen Raketen folgende Strecken ab: Erde-Merkur, Uranus-Venus, Merkur-Venus, Erde-Uranus, Uranus-Merkur, Neptun-Saturn, Jupiter-Saturn, Neptun-Mars und Mars-Jupiter. Ist es möglich von der Erde aus bis zum Mars zu kommen?

2. Ein Brett hat die Form eines Kreuzes, die man erhält, wenn man aus einem Quadrat (4*4) die 4 Eckfelder herausschneidet. Kann man dieses Brett wie die Figur des Springers im Schachspiel durchqueren, der dabei jedes Feld nur einmal durchzieht, am Ende aber zu seinem Ausgangspunkt zurückkehrt?

3. Im Matheland gibt es 9 Städte, die 1,2,3,...,9 heißen. Ein durch das Land Reisender hat festgestellt, dass zwischen 2 Städten genau dann eine Fluglinie existiert, wenn die zweistellige Zahl, die aus den Namen der jeweiligen Städte gebildet wird, durch 3 teilbar ist. Besteht die Möglichkeit von Stadt 1 zu Stadt 9 zu fliegen?

Grad des Knotens, Kantenmenge

4. In einer Kleinstadt gibt es 15 Telefonanschlüsse. Besteht zwischen allen eine Verbindung, auch wenn jeder Anschluss mit genau 5 anderen verbunden ist?

5. In einem Land gibt es 100 Städte. Wie viele Straßen gibt es in diesem Land insgesamt, wenn aus jeder Stadt immer 4 Straßen führen?

6. In einer Klasse gibt es 30 Kinder. Ist es möglich, dass von ihnen 9 Kinder genau 3 Freunde, 11 Kinder genau 4 Freunde und 10 Kinder genau 5 Freunde aus der selben Klasse haben?

7. Ein König hat insgesamt 19 Vasallen. Kann es sein, dass jeder dieser Vasallen entweder 1, 5 oder 9 andere Vasallen als Nachbarn hat?

8. Beweise, dass die Anzahl der Menschen, die in ihrem Leben eine ungerade Anzahl an Begrüßungen mit Händedruck gegeben haben, gerade ist!

9. Kann man auf einer Ebene 9 Strecken so einzeichnen, dass jede dieser Strecken genau drei andere durchquert?

Zusammenhang

10. Im Siebenland gibt es 15 Städte. Jede dieser Städte ist mit mehr als 6 anderen durch eine Straße verbunden. Beweise, dass man von jeder beliebigen Stadt aus alle anderen Städte erreichen kann!

11. Beweise, dass jeder Graph mit n Knoten zusammenhängend ist, wenn das Grad jedes Knotens nicht weniger als (n-1)/2 ist.

12. Im Traumland gibt es nur ein Verkehrsmittel — "Der Fliegende Teppich". Die Hauptstadt hat 21 Teppichfluglinien, die Stadt "In der Ferne" hat nur eine und alle übrigen Städte haben genau 20 Teppichfluglinien. Zeige, dass man von der Hauptstadt aus die Stadt "In der Ferne" tatsächlich erreichen kann!

13. Im Vernunftland führen aus jeder Stadt 100 Wege, über die man jeweils alle anderen Städte erreichen kann. Eine Straße ist auf einmal für Umbauarbeiten gesperrt. Kommt man nach wie vor von einer Stadt in die andere?

Kapitel VIII. Konstruktionen und Gewichtsbestimmung

1. Es gibt 2 Sanduhren: der Sand rinnt durch diese jeweils in 7 und 11 Minuten. Das Ei muss 15 Minuten gekocht werden. Wie kann man mit Hilfe beider Uhren diesen Zeitraum messen?

2. In einem Lift eines Hauses mit 20 Stockwerken gibt es nur 2 Knöpfe: drückt man den einen Knopf, fährt man 13 Stockwerke herauf, drückt man auf den anderen, fährt man 8 Stöckwerke herunter. Wie kann man vom 13. Stock aus den 8. erreichen ?

3. Auf einer Tafel steht die Zahl 458. Man kann bei jedem Durchgang die Zahl entweder verdoppeln oder die letzte Ziffer wegwischen. Wie erreicht man bei Wiederholung dieses Vorganges die Zahl 14 am schnellsten?

4. Teile die Gewichte mit 1,2,3,...,555g auf drei gleich schwere Haufen auf.

5. Fülle eine 4*4-Tabelle mit Zahlen, dass die Summe der Zahlen in den Eckfeldern jedes 2*2-, 3*3- oder 4*4-Quadrates immer gleich 0 ist. Die einzusetzenden Zahlen selbst dürfen nicht gleich 0 sein.

6. Kann man die Zahlen von 1 bis 12 den Kanten eines Würfels so zuordnen, dass die Summe aller Zahlen einer jeden Würfelseite gleich groß ist?

7. Finde eine zweistellige Zahl, deren Quersumme unverädert bleibt, auch wenn man diese mit einer beliebigen Zahl zwischen 1 und 9 multipliziert.

8. Gibt es zwei aufeinaderfolgende natürliche Zahlen, deren Summe durch 7 teilbar ist?

9. In einer Burg gibt es 64 Zimmer, die als ein 8*8-Quadrat angeordnet sind. In jeder einzelnen Zimmerwand befindet sich eine Tür. Der Boden eines jeden Zimmers ist zunächst weiß gestrichen. Jeden Morgen geht der Maler Thomas durch die Burg spazieren und ändert in jedem besuchten Zimmer die Bodenfarbe: entweder von weiß auf schwarz oder von schwarz auf weiß. Kann es passieren, dass die gestrichenen Fußböden in der ganzen Burg irgendwann wie ein Schachbrett angeordnet sind?

10. Wie legt man mehrere Münzen auf den Tisch, dass jede Münze genau 3 andere berührt?

11. Es gibt 9 Münzen. Unter ihnen ist eine Münze gefälscht und somit leichter als die anderen. Wie findet man die gefälschte Münze, indem man nur zweimal ie Wage mit zwei Wagschalen benutzen darf?

12. Es gibt 10 Münzsäcke. In einem Sack befinden sich ausschließlich gefälschte Münzen, wobei jede gefälschte Münze 1 Gramm leichter als eine echte wiegt. Wie findet man den «gefälschten» Sack, wenn man nur einmal eine Wage, die die Differenz der Gewichte in ihren zwei Wagschalen in Gramm angibt, benutzen darf?

13. Es gibt 101 Münzen. Unter ihnen befindet sich eine gefälschte Münze mit einem anderen Gewicht. Es muss geklärt werden, ob die gezinkte Münze schwerer oder leichter als die übrigen ist. Wie löst man das Problem, wenn man eine Wage mit zwei Wagschalen nur zweimal zur Hilfe nehmen darf ?

14. Es gibt 6 Münzen. Zwei von ihnen sind gefälscht und somit leichter als die anderen. Wie findet man die beiden Münzen, wenn man insgesamt nur dreimal die Wage benutzen darf?

15. Es gibt 10 Münzsäcke. In manchen dieser Säcke befinden sich ausschließlich gefälschte Münzen, wobei jede Münze 1 Gramm leichter ist als eine echte. In den übrigen Säcken sind alle Münzen echt; einer dieser Säcke ist sogar bekannt. Wie findet man alle «gefälschten» Säcke, wenn man eine Wage, die die Differenz der Gewichte in ihren zwei Wagschalen in Gramm angibt, nur einmal benutzen darf?

16. Es gibt insgesamt 5 Münzen. 3 Münzen sind davon echt und 2 Münzen gefälscht. Von den gefälschten Münzen wiegt die eine mehr und die andere weniger als die echten Münzen. Wie findet man nun die Gefälschten, wenn man eine Wage nur dreimal zur Hilfe nehmen darf?

17. Es gibt 68 verschiedene Steine. Finde den leichtesten und den schwersten Stein unter ihnen, wenn du die Wage nur max. 100-mal benutzen darfst!

18. Es gibt 64 verschiedene Steine. Finde die zwei schwersten Steine unter ihnen, indem du die Wage nicht mehr als 68-mal benutzt.

19.1 Es gibt 16 Münzen. Eine von ihnen ist gefälscht und hat ein anderes Gewicht. Es ist jedoch nicht bekannt, ob sie schwerer oder leichter als die anderen Münzen ist. Finde die gefälschte Münze, indem du allerdings nur 4-mal wiegen darfst.

19.2 Es gibt 12 Münzen. Eine von ihnen ist gefälscht und hat ein anderes Gewicht. Es ist jedoch nicht bekannt, ob sie schwerer oder leichter als die anderen Münzen ist. Finde die gefälschte Münze, indem du allerdings nur 3-mal die Wage benutzen darfst.

20. Dem Gericht liegen 14 Münzen als Beweisgegenstände vor. Es ist bekannt, dass von den 14 Münzen die Hälfte gefälscht ist. Die gefälschten Münzen wiegen weniger als die echten. Der Anwalt des Beschuldigten weiß genau, welche Münzen echt und welche unecht sind. Wie kann er das Gericht davon überzeugen, indem er die Wage nicht mehr als dreimal zur Hilfe nimmt?

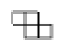
Kapitel IX. Bedeckungen

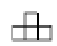
1. Kann man das 5*5-Quadrat mit Dominosteinen bedecken?

2. Aus dem Schachbrett wurden zwei gegenüberliegende Eckfelder ausgeschnitten. Kann man den Rest mit Dominosteinen bedecken?

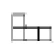
3. Aus den gegenüberliegenden Ecken eines 10*10 Brettes wurden zwei 3*3-Quadrate ausgeschnitten. Kann man den Rest mit Dominosteinen bedecken?

4. Denke eine aus dem Schachbrett ausgeschnittene Figur aus, die gleich viele schwarze und weiße Felder hat und die man mit den Dominosteinen nicht bedecken kann.

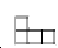
5. Kann man ein 10*10-Brett mit 25 Figuren der Form  bedecken?

6. Kann man ein 10*10-Brett mit 25 Figuren der Form  bedecken?

7. Kann man ein 10*10-Brett mit 25 Figuren der Form  bedecken?

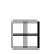
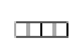
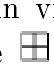
8. Kann man ein 10*10-Brett mit 25 Figuren der Form  bedecken?

9. Beweise, dass man ein Schachbrett ohne ein Eckfeld mit 1*3-Rechtecken nicht bedecken kann.

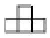
10. Kann man das Schachbrett in einen 2*2-Quadrat und 15 Figuren der Form  zerschneiden?

11. Das Quadrat a) 5*5 b) 8*8 hat man in mehrere 1*3-Rechtecke und einen 1*1-Quadrat geteilt. Wo kann sich das 1*1-Quadrat befinden?

12. Wie viele 1*1*4-Blöcke höchstens kann man aus dem 6*6*6-Kubus ausschneiden?

13. Ein Rechteck ist in viele Figuren der Form  und  zerschnitten. Eine  Figur wurde durch eine  Figur ersetzt. Beweise, dass man jetzt den Rechteck nicht zusammenstellen kann.

14. Für welche n kann man das n*n-Quadrat mit Figuren der folgenden Form bedecken?

a. 

b. 

15. Ein m*k-Rechteck ist mit 1*n-Rechtecken bedeckt. Beweise, dass m oder k durch n teilbar sind.

a. für n=3

b. für n=4

c. für jedes n

Kapitel X. Logik I

Die Insel der Ritter und Schurken

Es gibt eine Vielzahl ausgeklügelter Aufgaben von einer Insel, auf der sowohl Ritter leben, die nur die Wahrheit sagen, als auch Schurken, die nichts anderes als Lügen von sich geben können. Man geht davon aus, dass jeder Inselbewohner entweder ein Ritter oder ein Schurke ist.

1. So beginnen wir gleich mit einer schon alt bekannten Aufgabe. Drei Inselbewohner (A, B und C) unterhalten sich untereinander in einem Garten. Nun kommt ein Fremder vorbei und fragt A : „Sind Sie ein Ritter oder ein Schurke?“. Dieser antwortet ihm, allerdings auf eine so unverständliche Art und Weise, dass der Fremde gar nichts versteht. Daraufhin stellt der Fremde nun B die Frage: „Was hat A gesagt?“. „A hat gesagt, dass er ein Schurke ist.“, antwortet ihm B. „Glaubt doch nicht B! Er lügt!“, mischt sich der dritte Insulaner C ins Gespräch ein.

Hilfe! Welcher von den beiden Insulanern, B und C, ist denn nun ein Ritter und wer ein Schurke?

2. Als ich zum ersten Mal auf diese vorangegangene Aufgabe gestoßen bin, ist mir doch aufgefallen, dass C im Grunde genommen völlig untätig handelt, indem er auf seine Weise den „kostenlosen Nachtrag“ liefert. Tatsächlich, nachdem B ausgeredet hatte, hätte man es doch bei seiner Ausage, dass A ein Lügner ist, belassen können - ohne das C sich hätte einmischen müssen. Die nächste Aufgabe kommt um solche Ausschweifungen herum, da sie anders strukturiert ist. Gehen wir davon aus, dass der Fremde A eine andere Frage stellt: „Wie viele Ritter sind unter Ihnen?“. Auch dieses Mal antwortet A auf eine unverständliche Weise. Der Fremde ist nun genötigt B zu fragen: „Was hat A gesagt?“. B antwortet ihm: „A hat gesagt, dass unter uns ein Ritter ist.“ Da schreit C auf: „Glaubt B nicht! Er lügt!“

Und nun? Wer von den beiden Personen, B und C, ist der Ritter und wer der Schurke?

3. In dieser Aufgabe gibt es 2 Personen, A und B. Jeder einzelne von beiden ist entweder ein Ritter oder ein Schurke. Das Ganze bestätigt A mit folgender Aussage: „Also, mindestens einer von uns beiden ist ein Schurke!“ Wer von den beiden ist jetzt ein Ritter und wer ein Schurke?

4. Angenommen, dass A sagt: „Entweder ich bin ein Schurke oder B ist ein Ritter.“ Wer von den beiden Personen, A und B, ist jetzt ein Ritter und wer ist ein Schurke?

5. Angenommen, dass A sagt: „Entweder ich bin ein Schurke oder 2+2 macht 5!“ Zu welcher Schlussfolgerung kommt man dann auf Grundlage dieser Äußerung?

6. Vor uns stehen 3 Inselbewohner: A, B und C. Es ist bekannt, dass jeder von ihnen entweder ein Ritter oder ein Schurke ist. A und B treffen folgende Aussagen:

A: Wir lügen doch alle.

B: Genau einer von uns ist ein Ritter.

Wer von den 3 Inselbewohnern ist nun ein Ritter und wer ein Schurke?

7. Angenommen, dass A und B folgende Aussagen treffen:

A: Wir sind alle Schurken!

B: Genau einer von uns ist ein Schurke!

Kann man festlegen, ob B ein Ritter oder ein Schurke ist? Und wen stellt Inselbewohner C dar?

8. Nehmen wir mal an, dass A die Aussage trifft: „Ich bin ein Schurke, aber B ist es nicht." Wer von den Inselbewohnern ist der Ritter und wer dann der Schurke?

9. Vor uns stehen nun zum wiederholten Male drei Inselbewohner: A, B und C. Man weiß, dass jeder von ihnen entweder ein Ritter oder ein Schurke ist. Zwei Insulaner entsprechen einem gleichen Typ, wenn sie entweder beide Ritter oder beide Schurken sind. A und B treffen folgende Aussagen:

A: B ist ein Schurke!

B: A und C entsprechen dem gleichen Typ.

Ist C dann ein Ritter oder ein Schurke?

10. Vor uns stehen wieder einmal 3 Insulaner: A, B und C. A trifft die Aussage: „B und C entsprechen dem gleichen Typ!" Auf einmal fragt jemand C: „Entsprechen A und B einem gleichen Typ?" Was antwortet da der Insulaner C?

11. Ein kleiner Zwischenfall Hier nun ein ungewöhnliches kopfzerbrechendes Rätsel. Überdies beruht es auf einer wahren Begebenheit. Eines Tages als ich zu Gast auf der Insel der Ritter und Schurken war, traf ich auf zwei Inselbewohner. Ich fragte einen von beiden: „Ist einer von euch ein Ritter?". Meine Frage blieb nicht unbeantwortet und ich erfuhr, was ich in Erfahrung bringen wollte.

Wer war nun der Inselbewohner, an den ich meine Frage richtete: War es ein Ritter oder ein Schurke? Und was war der andere Insulaner dann? Ich versichere euch, dass die Information, die ich euch zur Verfügung gestellt habe, ausreicht, um die Aufgabe zu lösen.

12. Nehmen wir mal an, dass ihr euch auf der Insel der Ritter und Schurken befindet und auf zwei Bewohner trefft, die faul in der Sonne liegen und sich sonnen. Ihr fragt einen von beiden, ob er einen Ritter zum Freund hat und erhaltet als Antwort entweder ein Ja oder ein Nein. Anschließend stellt ihr dem anderen Inselbewohner die gleiche Frage und bekommt ebenfalls zur Antwort ein Ja oder ein Nein. Müssen beide Antworten zwangsweise die gleichen sein?

13. Eduard oder Edwin? Dieses Mal, während ihr so über die Insel spaziert, trefft ihr zufällig auf einen Inselbewohner, der hoffnungslos am Ufer eines Teiches stecken geblieben ist. So sehr ihr euch auch bemüht, es gelingt euch einfach nicht ihn aus dem Morast zu ziehen. Ihr könnt euch daran erinnern, dass er entweder Eduard oder Edwin heißt, aber ganz genau wisst ihr es nicht mehr. Also fragt ihr den Inselbewohner, wie er heißt und kriegt als Antwort zu hören: „Eduard“. Wie heißt der Inselbewohner?

Ritter, Schurken und normale Menschen

In einer nicht minder attraktiven Variante dieser Knobelaufgaben teilt man die Figuren in drei Typen auf: die Ritter, die immer die Wahrheit sagen, die Schurken, die nur lügen und die normalen Menschen, die manchmal lügen und manchmal die Wahrheit sagen. Hier nun meinerseits ein paar Aufgaben mit Rittern, Schurken und normalen Menschen.

14. Vor uns sind drei Menschen: A, B und C. Einer von ihnen ist ein Ritter, der andere ein Schurke und der dritte ist ein normaler Mensch (die Aufzählung der unterschiedlichen Charaktere entspricht nicht unbedingt der Reihenfolge A, B und C). Unsere Bekannten behaupten nun folgendes:

A: Ich bin ein normaler Mensch.

B: Das stimmt.

C: Ich bin kein normaler Mensch.

Wer sind nun A, B und C?

15. Ich bitte euch nun darum, eure Aufmerksamkeit auf eine ungewöhnliche Aufgabe zu richten. Es gibt 2 Menschen: A und B. Man weiß, dass jeder von beiden entweder ein Ritter, ein Schurke oder ein normaler Mensch ist. Sie behaupten folgendes:

A: B ist ein Ritter.

B: A ist kein Ritter.

Beweist, dass mindestens einer von beiden die Wahrheit sagt – er ist allerdings kein Ritter.

16. Dieses Mal behaupten A und B folgendes:

A: B ist ein Ritter.

B: A ist ein Lügner.

Beweist, dass entweder einer von beiden die Wahrheit sagt, er allerdings kein Ritter ist oder einer von beiden lügt, obwohl er kein Schurke ist.

17. Die Rangordnung Auf einer Insel, auf der Ritter, Schurken und normale Menschen wohnen, zählen die Schurken zur unteren Schicht, die normalen Menschen zur Mittelschicht und die Ritter zur oberen Schicht. Mir gefällt die nächste Aufgabe sehr. Von zwei Personen, A und B, weiß man, dass eine von beiden entweder ein Schurke, ein Ritter oder ein normaler Mensch ist. Sie behaupten folgendes:

A: Dem Rang nach befinde ich mich unter B.

B: Das stimmt nicht!

Kann man den Rang von A und B bestimmen? Kann man feststellen, ob diese zwei Behauptungen wahr oder falsch sind?

18. Es gibt drei Personen: A, B und C. Man weiß, dass eine von ihnen ein Ritter, die andere ein Schurke und die dritte ein normaler Mensch ist. Sie behaupten folgendes:

A: B nimmt einen höheren Rang als C ein.

B: C nimmt einen höheren Rang als A ein.

Anschließend fragt man C: „Wer ist dem Rang nach älter – A oder B?“ Was antwortet darauf C?

Die Insel Bakhava

Auf der Insel Bakhava genießen die Frauen in jedem Bereich die gleichen Rechte wie die Männer. Deswegen nennt man die Frauen, ebenso wie die Männer, Ritter, Schurken und normale Menschen. Vor langer Zeit erteilte einst eine der Herrscherinnen auf der Insel Bachava ganz aus einer persönlichen Laune heraus den Befehl, der darüber verfügte, dass Ritter nur mit Schurken eine Ehe eingehen können und Schurken nur mit Rittern (Folglich kann ein normaler Mensch sich auch nur mit einem normalen Menschen vermählen). Seit jener Zeit sind die Ehepaare so liiert, dass entweder beide Ehepartner normale Menschen sind oder einer von beiden ein Ritter und der andere ein Schurke ist. Die folgenden drei Geschichten finden ihren Ursprung auf der Insel Bakhava.

19. Betrachten wir zunächst ein Ehepaar, Mr. und Ms. A. Sie behaupten folgendes:

Mr.A: Meine Frau ist kein normaler Mensch.

Ms.A: Mein Mann ist kein normaler Mensch.

Ist Mr.A nun ein Ritter, ein Schurke oder doch ein normaler Mensch? Und Ms. A?

20. Nehmen wir an, dass Mr. und Ms. A folgendes behaupten:

Mr.A: Meine Frau ist ein normaler Mensch.

Ms.A: Mein Mann ist ein normaler Mensch.

Stimmt die Antwort dieser Aufgabe mit der Antwort der vorherigen Aufgabe überein?

21. In dieser Aufgabe geht es nun um zwei Ehepaare von der Insel Bachava: es geht sowohl um Mr. und Ms. A als auch um Mr. und Ms. B. Bei einer Umfrage gaben drei von ihnen folgendes an:

Mr.A: Mr. B ist ein Ritter.

Ms.A: Mein Mann hat Recht, Mr. B ist ein Ritter.

Ms.B: Was wahr ist, ist wahr! Mein Mann ist tatsächlich ein Ritter.

Wer von den Eheleuten ist nun ein Ritter, ein Schurke oder ein normaler Mensch? Und wer von den drei Befragten sagt die Wahrheit?

Kapitel XI. Logik II

Einsteins Rätsel

Es gibt fünf Häuser in fünf verschiedenen Farben. In jedem Haus wohnt eine Person einer anderen Nationalität. Jeder Hausbesitzer bevorzugt ein bestimmtes Getränk, eine bestimmte Zigarettenmarke und ein bestimmtes Haustier. Der Brite lebt im roten Haus. Der Schwede hält sich einen Hund. Der Däne trinkt gerne Tee. Das grüne Haus steht links neben dem weißen Haus. Der Besitzer des grünen Hauses trinkt Kaffee. Der Pall-Mall-Raucher hält sich einen Vogel. Der Milchtrinker wohnt im mittleren Haus. Der Besitzer des gelben Hauses raucht Dunhill. Der Norweger wohnt im ersten Haus. Der Marlboro-Raucher wohnt neben dem Katzenliebhaber. Der Mann, der sich ein Pferd hält, wohnt neben dem Dunhill-Raucher. Der Winfielt-Raucher trinkt gerne Bier. Der Norweger wohnt neben dem blauen Haus. Der Deutsche raucht Rothmanns. Einer Nachbar des Marlboro-Rauchers trinkt gerne Wasser.

Könnt ihr herausbekommen, welcher Hausbesitzer sich einen Fisch zu Hause hält?

1. Im Cafe treffen sich drei Freunde (es klingt angenehmer und ansprechender im Präsens): der Maler - Herr Rot, der Geiger - Herr Schwarz und der Bildhauer - Herr Weiß. „Merkwürdig, einer von uns ist blond, einer rothaarig und einer schwarzhaarig, wobei die Haarfarbe überhaupt nicht mit unserem Nachnamen übereinstimmt.“ – bemerkt der Schwarzhaarige. „Du hast völlig Recht!“, erwidert Herr Weiß.

Könnt ihr die Haarfarbe des Malers bestimmen?

2. Herr Strom, Herr Storm und Herr Brunne wohnen in einer Straße. Einer von ihnen ist ein Tischler, einer ein Maler und einer ein Klempner. Vor kurzem wollte der Maler seinen Bekannten, den Tischler, bitten etwas in seiner Wohnung herzurichten, aber der Tischler arbeitete gerade beim Klempner zu Hause. Ebenfalls weiß man, dass Herr Storm Herrn Brunne nicht kennt.

Wer hat nun welchen Beruf?

3. Drei Freunde — Stefan, Konrad und Ulrich — haben die Universität abgeschlossen und unterrichten seitdem Mathematik, Physik und Literatur in den Städten Berlin, Hamburg und Stuttgart. Stefan arbeitet nicht in Hamburg und Konrad nicht in Stuttgart. Der Hamburger lehrt nicht Physik und Konrad nicht Mathematik, der Berliner hingegen Literatur. Wer unterrichtet welches Fach und in welcher Stadt?

4. Machen wir uns mit drei Personen bekannt: nämlich mit Herrn Albrecht, Herrn Böhm und Herrn Berger. Einer von ihnen ist Architekt, einer Buchhalter und einer Archäologe. Sie wohnen in Bonn, Bielefeld und Aachen. Herr Berger fährt selten nach Bonn, obwohl alle seine Verwandten dort wohnen. Für zwei der Herren gilt, dass der Anfangsbuchstabe ihres Berufes mit dem ihres Wohnortes übereinstimmt. Die Frau des Architekten ist die Schwester von Herrn Berger.

Wer übt hier welchen Beruf in welcher Stadt aus?

5. An einem runden Tisch sitzen vier Studentinnen. Die Germanistikstudentin sitzt neben der Geschichtsstudentin und gleichzeitig Katharina gegenüber. Die Mathematikstudentin sitzt neben Anika. Kayra und die Physikstudentin sind Steffis Nachbarinnen.

Welches Fach studiert Katharina?

6. Andreas, Bernd, Klaus und David wohnen in einer Stadt. Sie sind Bäcker, Zahnarzt, Bauingenieur und Polizist. Andreas und Bernd sind Nachbarn und fahren immer zusammen zur Arbeit. Bernd ist älter als Klaus. Andreas gewinnt oft gegen David im Tischtennis. Der Bäcker geht immer zu Fuß zur Arbeit. Der Polizist und der Zahnarzt wohnen in verschiedenen Stadtteilen. Der Polizist ist nur einmal auf den Bauingenieur gestoßen, als dieser letztens bei Rot über die Ampel gefahren ist. Außerdem ist der Polizist sowohl älter als der Zahnarzt als auch älter als der Bauingenieur.

Wer übt hier welchen Beruf aus?

7. Ernst, Friedrich, Georg und Helmut sind Taxifahrer, Schlosser, Zimmerer und Goldschmied. Ernst gewinnt gegen Georg im Schach , verliert aber gegen Helmut. Außerdem läuft er besser Ski als derjenige, der jünger ist als er. Er geht doppelt so häufig ins Theater wie derjenige, der älter ist als Friedrich. Der Schlosser, der doppelt so häufig ins Theater geht wie der Taxifahrer, ist weder der Älteste noch der Jüngste. Der Zimmerer, der Ski schlechter läuft als der Goldschmied, verliert oft im Schach gegen den Taxifahrer. Der Älteste spielt am besten Schach und besucht am häufigsten das Theater. Der Jüngste unter ihnen läuft am besten Ski.

Es ist bekannt, dass alle Männer sowohl unterschiedliche Theaterpräferenzen besitzen, als auch vollkommen verschiedene Sportleistungen aufweisen, die sich nicht wiederholen. Bestimme den Beruf eines jeden Mannes!

8. Ein Zugpersonal besteht aus einem Mechaniker, einem Schaffner, einem Zugführer und seinem Stellvertreter. Sie heißen Peter, Paul, Thomas und Walter. Thomas ist älter als Peter. Der Mechaniker ist mit keinem seiner Kollegen verwandt. Der Zugführer und sein Stellvertreter sind Brüder; mehr Brüder haben sie nicht. Thomas ist Pauls Neffe. Der

Stellvertreter ist nicht der Onkel des Schaffners und der Schaffner ist nicht der Onkel des Zugführers.

Wer ist wofür im Zug zuständig? Und welche verwandtschaftlichen Beziehungen bestehen unter den Angestellten ?

9. In der ersten Klasse des ICE von Berlin nach München fahren sechs Personen: Anton, Brigitte, Cornelia, David, Elsa und Frank. Sie wohnen in unterschiedlichen Städten entlang der Strecke: in Leipzig, Naumburg, Jena, Nürnberg, Ingolstadt und München. Anton und die mitfahrende Person aus Leipzig sind beide Ärzte. Elsa und die mitfahrende Person aus Naumburg sind beide LehrerInnen. Cornelia und der Fahrgast aus Jena sind IngenieurInnen.

Brigitte und Frank haben einen Realschulabschluss, die mitfahrende Person aus Jena hat ihr Abitur in der Schweiz gemacht. Die mitfahrende Person aus Ingolstadt ist älter als Anton und der Fahrgast aus München ist älter als Cornelia. Anton und die mitfahrende Person aus Leipzig steigen in Nürnberg aus. Cornelia und die Person aus Ingolstadt erst in Saalfeld.

Stelle den Beruf und den Wohnort jedes einzelnen Fahrgastes fest!

Kapitel XII. Zahlensysteme

1. Für welches Zahlensystem gilt $3 * 4 = 10$?

2. Gibt es ein Zahlensystem, für das gilt

a. $3 + 4 = 10$ und $3 * 4 = 15$?

b. $2 + 3 = 5$ und $2 * 3 = 11$?

3. Formuliere und beweise die Regel, mit der man die Parität einer Zahl bestimmen kann in einem

a. 3-adischen Zahlensystem!

b. n-adischen Zahlensystem!

4. Der Tafeldienst war sehr nachlässig. Auf einer Tafel erkennt man eine Gleichung, deren Zahlen nur teilweise weggewischt wurden.

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 3 & & 5 & \\ + & 1 & & 6 & 4 & 2 \\ \hline & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{array}$$

Bestimme das Zahlensystem der Gleichung und vervollständige ihre Summanden!

5. Ein Mathelehrer behauptet, dass es in seiner Klasse insgesamt 100 Schüler gibt, wobei die Klasse aus 24 Jungen und 32 Mädchen besteht. Welches Zahlensystem hat er für seine Behauptung angewendet?

6. Formuliere und beweise die Teilbarkeitsregel für Division durch a) eine beliebige Potenz der Basis des Zahlensystems (analog zur Teilbarkeit durch 100, 1000 usw.)! b) einen Teiler der Basis des Zahlensystems (analog zur Teilbarkeit durch 2 und 5)!

7. Formuliere und beweise die Teilbarkeitsregel für Division durch

a. einen Teiler der „Basis -1“ (analog zur Teilbarkeit durch 3)

b. die „Basis+1“ (analog zur Teilbarkeit durch 11)

c. einen Teiler der „Basis+1“ (wobei es keine Analogien gibt)

8. Was ist die kleinstmögliche Anzahl an Gegengewichten, die man benötigt, um eine beliebige Masse zwischen 1g und 100g auf einer Wagschale zu wiegen?

9. Die Hexe hat sich drei zweistellige Zahlen, a, b und c, ausgedacht. Hänsel muss ihr nun drei Zahlen, X, Y und Z, nennen. Erst danach wird die Hexe dem armen Hänsel die Zahlen aX+bY+cZ mitteilen. Hänsel muss die von der Hexe ausgedachten Zahlen erraten, ansonsten wird er schonungslos von ihr verschlungen.Wie kann er gerettet werden?

10. Beweise, dass man 2^k Zahlen aus einer Zahlenmenge $0, 1, 2, ..., 3^k - 1$ so auswählen kann, dass keine dieser ausgewählten Zahlen das arithmetische Mittel zweier anderer, ebenfalls ausgesuchter Zahlen ist.

11. Beweise, dass man 2^k Zahlen aus einer Zahlenmenge $0, 1, 2, ..., (3^k - 1)/2$ so auswählen kann, dass keine dieser ausgewählten Zahlen das arithmetische Mittel zweier anderer, ebenfalls ausgesuchter Zahlen ist.

Kapitel XIII. Induktion

1. Aus einem $2^n * 2^n$-Quadrat auf kariertem Papier wurde ein Kästchen herausgeschnitten. Beweise, dass man diese Figur in Kästchen der Form  zerlegen kann.

2. Beweise, dass man jeden Geldbetrag ab 8 Mark mit 3- und 5-Markscheinen auszahlen kann.

3. Ermittle eine natürliche Zahl n, die der Summe

a. 3 ihrer jeweils unterschiedlichen Teiler entspricht!

b. 100 ihrer jeweils unterschiedlichen Teiler entspricht!

4. Beweise, dass es für jedes $n>3$ ein konvexes n-Eck gibt mit genau 3 spitzen Winkeln.

5. Kennst du das Spiel der „Turm von Hanoi“? Es gibt eine Pyramide mit n Ringen, deren Radius immer kleiner wird. Der größte Ring bildet die Grundfläche der Pyramide. Die Ringe liegen übereinander auf einem Stab. Neben der Pyramide stehen zwei ebenso große leere Stäbe. Es ist erlaubt immer den obersten Ring eines Stabes auf einen anderen zu legen. Wichtig ist dabei, dass immer die kleineren Ringe auf den größeren Ringen zum Liegen kommen. Beweise, dass man

a. alle Ringe des ersten Stabes auf einen der beiden leeren Stäbe umschichten kann!

b. dafür nicht mehr als (2n-1)-mal umschichten muss!

6. Eine Ebene ist durch mehrere Geraden in Gebiete aufgeteilt. Beweise, dass man mit nur zwei Farben alle Gebiete so bestreichen kann, dass zwei benachbarte Gebiete niemals den gleichen Farbanstrich besitzen. Benachbart sind diejenigen Gebiete, die eine gemeinsame Strecke besitzen.

7. In einem Rechteck (3*n) mit 3 Zeilen und n Spalten stehen jeweils n grüne, blaue und rote Spielsteine. Beweise, dass man die Spielsteine innerhalb der Zeilen so umstellen kann, dass sich in jeder Spalte Spielsteine von jeder Farbe befinden!

8. Eine Ebene ist durch mehrere Geraden und Kreise in Gebiete aufgeteilt. Beweise, dass man die Gebiete mit nur zwei Farben so bestreichen kann, dass zwei benachbarte Gebiete niemals den gleichen Farbanstrich besitzen. Benachbart sind diejenigen Gebiete, die eine gemeinsame Strecke besitzen.

9. Auf einer Ebene liegen n Geraden. Es gibt keine zwei parallele Geraden und keine drei Geraden, die isch in einem Punkt schneiden. In wie viele Gebiete ist die Ebene jetzt aufgeteilt?

10. Beweise, dass der Term $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ für jedes n durch 9 teilbar ist!

11. Beweise, dass der Term $6^n + 1$ für jedes ungerade n durch 7 teilbar ist!

12. Beweise, dass der Term $3^n - 1$ für jedes gerade n durch 8 teilbar ist! Beweise ebenfalls, dass für jedes ungerade n immer ein Rest von 2 übrig bleibt!

13. Beweise, dass der Term $4^n - 3n - 1$ für jede natürliche Zahl n durch 9 teilbar ist!

14. Beweise , dass für alle $n > 2$ die Ungleichung $2^n > 2n + 1$ gilt!

15. Beweise, dass für alle natürlichen Zahlen n die Ungleichung $2n > 8n - 17$ gilt!

16. Beweise, dass für alle natürlichen Zahlen n>3 die Ungleichung $n! > 2^n$ gilt!

17. Beweise, dass eine Zahl, die aus 243 Einsen besteht, durch 243 ($243 = 3^5$) teilbar ist!

Kapitel XIV. Teilbarkeit

1.1 $a + 1$ ist durch 3 teilbar. Zeige, dass $4 + 7a$ auch durch 3 teilbar ist!

1.2 $2 + a$ und $35 - b$ sind jeweils durch 11 teilbar. Zeige, dass $a + b$ ebenfalls durch 11 teilbar ist!

2. Es ist bekannt, dass $3a + 7b$ durch 19 teilbar ist. Zeige, dass $41a + 83b$ ebenfalls durch 19 teilbar ist!

3. p und q sind zwei verschiedene Primzahlen. Wie viele Teiler haben die Zahlen pq, p^2q, p^2q^2 und p^nq^m?

4. Beweise, dass das Produkt von 3 beliebigen aufeinander folgenden Zahlen durch 6 teilbar ist!

5. Beweise, dass das Produkt von 5 beliebigen aufeinander folgenden Zahlen durch

a. 30 teilbar ist.

b. 120 teilbar ist.

6. p ist eine Primzahl. Wie viele natürliche Zahlen gibt es, die zu p teilerfremd und kleiner

a. als p sind?

b. als p^2 sind?

7. Für welche kleinste natürliche Zahl $n!$ ist 990 ein Teiler?

8. Kann die Zahl $n!$ auf genau 5 Nullen enden?

9. Auf wie viele Nullstellen endet die Zahl 100! ?

10. Kann eine aus hundert Einzen, hundert Zweien und hundert Nullen bestehende Zahl eine Quadratzahl sein?

11. $56a = 65b$. Zeige, dass $a + b$ zusammengesetzt ist!

12. Ermittle den Rest bei Division von 9^{100} durch 8!

13. Zeige, dass für jedes beliebige n die Zahl $n^3 + 2n$ immer durch 3 teilbar ist!

14. Zeige, dass für jedes beliebige n die Zahl $n^2 + 1$ nicht durch 3 teilbar ist!

15. Zeige, dass für jedes ungerade n die Zahl $n^3 - n$ durch 24 teilbar ist!

16. Für zwei natürliche Zahlen a und b gilt, dass $a^2 + b^2$ durch 21 teilbar ist. Zeige, dass dann $a^2 + b^2$ auch durch 441 teilbar ist!

17. Drei Primzahlen p, q und r, die alle größer als 3 sind, bilden eine arithmetische Reihe: $p = p, q = p + d, r = p + 2d$. Zeige, dass d durch 6 teilbar ist!

18. Ermittle die letzte Ziffer der Zahl 250!

19. Ermittle die letzte Ziffer der Zahl 777^{777}!

20. Ermittle den Rest bei Division von 2^100 durch 3!

21. Beweise, dass die Zahl $2222^{5555} + 5555^{2222}$ durch 7 teilbar ist!

22.1 $p, p + 10$ und $p + 14$ sind Primzahlen. Ermittle p!

22.2 $p, 2p + 1, 4p + 1$ sind Primzahlen. Ermittle p!

23. p und $8p^2 + 1$ sind Primzahlen. Ermittle p!

24. $p, 4p^2 + 1$ und $6p^2 + 1$ sind Primzahlen. Ermittle p!

25. Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen a und b die Zahl $a^3 + b^3 + 4$ keine Quadratzahl ist!

26. Beweise, dass die Summe der n aufeinander folgenden ungeraden Zahlen für $n > 1$ immer zusammengesetzt ist!

27. Ermittle, welche kleinste natürliche Zahl den Rest 1 beim Teilen durch 2, den Rest 2 beim Teilen durch 3, den Rest 3 beim Teilen durch 4, den Rest 4 beim Teilen durch 5 und den Rest 5 beim Teilen durch 6 hat.

28. Beweise, dass es unendlich viele Primzahlen gibt!

Kapitel XV. Aufgaben mit Ziffern

1. Zeige, dass $\overline{ab} + \overline{ba}$ durch 11 teilbar ist!

2. $\overline{ab} + \overline{ba} = x^2$. Ermittle x!

3. Zeige, dass $\overline{abc} - \overline{cda}$ durch 99 teilbar ist!

4. a, b, c, d und e sind 5 verschiedene Ziffern. Beweise, dass

a. $\overline{ab} * \overline{cd} \neq \overline{ddee}$.

b. $\overline{ab} * \overline{cd} \neq \overline{dede}$.

c. $\overline{ab} * \overline{cd} \neq \overline{deed}$.

5. Beweise, dass jede Zahl und ihre Quersumme den gleichen Restbetrag aufweisen, wenn man sie durch 9 teilt!

6. Beweise, dass $\overline{ababab}$ durch 21 teilbar ist!

7. $\overline{abc} + \overline{bcd} + \overline{cda} + \overline{dac}$ ist durch 9 teilbar. Zeige, dass $\overline{abcd}$ durch 3 teilbar ist!

8. Die Quersumme der Zahl A ist gleich der Quersumme der Zahl 2A. Zeige, dass A durch 9 teilbar ist!

9. Die Zahl n besteht aus 4k-Einsen und k-Zweien. Zeige, dass k+6 eine zusammengesetzte Zahl ist!

10. Wenn die Quersumme einer Zahl durch 27 teilbar ist, so ist auch die Zahl selbst durch 27 teilbar. Stimmt das?

11. Eine russische Busfahrkarte ist ein kleiner Zettel aus Papier. Auf ihm steht eine sechsstellige Zahl. Man sagt, die Fahrkarte bringt dann Glück, wenn die Quersumme der ersten 3 Ziffern der Quersumme der letzten 3 Ziffern entspricht.

a. Ist die Anzahl der Glück bringenden Karten gerade oder ungerade?

b. Beweise, dass die Quersumme aller Kartennummern, die Glück bringen, durch 13 teilbar ist!

c. Gibt es mehr Karten, die Glück bringen oder mehr Karten, deren Quersumme durch 11 teilbar ist?

12. Beweise, dass die Zahl 11...1 (mit insgesamt 44 Einsen) durch 121 teilbar ist!

13.1 Beweise, dass $\overline{abc} - \overline{cba}$ keine Quadratzahl ist!

13.2 Kann $\overline{abcde} - \overline{edcba}$ eine Quadratzahl sein?

14. Man hat die Ziffern der Zahl n so vertauscht, dass die Zahl nun um ein dreifaches kleiner geworden ist. Zeige, dass n durch 27 teilbar ist!

15. Die Zahl $x^2 + 1$ ist zehnstellig. Beweise, dass sie zwei gleiche Ziffern besitzt!

16. Die Zahl n ist durch 99 teilbar. Zeige, dass ihre Quersumme nicht kleiner als 18 ist!

17. Man subtrahiert von einer Zahl ihre Quersumme. Beweise, dass, nachdem man den Vorgang 100-mal wiederholt hat, aus einer dreistelligen Zahl eine Null entsteht!

18. Ist die Quersumme aller 10-stelligen Zahlen oder die Quersumme aller 11-stelligen Zahlen, die durch 5 teilbar sind, größer?

Kapitel XVI. Diophantische Gleichungen

1. Ermittle alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $2x + 5y = xy - 1$!

2. Beweise, dass die Gleichung $x^2 + 2110 = y^2$ keine ganzzahligen Lösungen besitzt!

3. Beweise, dass die Gleichung $4^k - 4^l = 10^n$ keine ganzzahligen Lösungen besitzt!

4. Ermittle alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 4(xy + yz + xz)$!

5. Ermittle alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$!

6. Ermittle alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $1/a + 1/b = 1/c$, wobei b und c Primzahlen sind!

7. Ermittle alle Rechtecke, deren Seiten eine natürliche Länge haben und deren Umfang der Rechtecksfläche entspricht.

8.1 Ermittle alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $1/a + 1/b + 1/c = 1$!

8.2 $1/a + 1/b + 1/c < 1$. Beweise, dass $1/a + 1/b + 1/c \leq 41/42$!

9. Ermittle alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$!

10. Ermittle den kleinstmöglichen Betrag von $36^k - 5^l$, wobei k und l natürliche Zahlen sind!

11. Ermittle alle Primzahlen, die die Gleichung $pqr = 7(p + q + r)$ erfüllen!

12. Ermittle alle natürlichen Zahlen, die die Gleichung $3^n + 55 = m^2$ erfüllen!

13. Ermittle alle natürlichen Zahlen, die die Gleichung $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$ erfüllen!

14. Ermittle alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$!

15. Ermittle alle ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} a^2 + b - c = 100 \\ a + b^2 - c = 124 \end{cases}$$

16. Eine natürliche Zahl a ist fest. Beweise, dass die Gleichung $x! = y^2 + a^2$ nur endlich viele Lösungen (x, y) hat!