

**Von Apollonios aus dynamisch Mathematik entdecken –
Leuchten wir mit Cabri
in wenig bekannte und unbekannte stille Winkel der Geometrie¹**

Es wird gezeigt, wie mit Hilfe der Cabri-Geometrie Sätze der ebenen und räumlichen Geometrie ausgehend vom Satz von Apollonios gefunden werden können, wobei die Beweise zum Teil unter Benutzung von komplexen Zahlen geführt werden. Die praktische Durchführung des Findungsprozesses oblag Studenten der Karlsuniversität Prag und wurde auf der 37. Tagung für Didaktik der Mathematik im März 2003 in Dortmund vorgestellt. Die absolute Neuheit der auf diese Weise gefundenen Sätze wird nicht behauptet.

Wir betrachten zu drei gegebenen, positiven reellen Zahlen a, b, c die drei Apollonioskreise k_{AB}, k_{BC}, k_{CA} , deren Punkte von den Enden der Seiten $[AB], [BC], [CA]$ eines Dreiecks ABC die Entfernungverhältnisse $a : b, b : c$ beziehungsweise $c : a$ haben.

Die wichtigsten Aussagen dieser Arbeit sind:

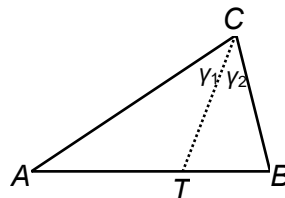
- Die Apollonioskreise k_{AB}, k_{BC}, k_{CA} gehören zu einem Kreisbüschel, genannt *Apolloniosbüschel* (Satz 5). Wenn die Zahlen a, b, c reziprok zu den Seitenlängen des Dreiecks sind, ist die Achse des Kreisbüschels die so genannte Brocard-Achse² des Dreiecks.
- Die Achsen aller dieser Kreisbüschel bilden ein Geradenbüschel, dessen Träger der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist (Satz 6).
- Das Apolloniosbüschel zu dem Tripel a, b, c ist genau dann parabolisch (beziehungsweise elliptisch), wenn der Punkt mit den trilinearen Koordinaten (a, b, c) in Bezug auf das Dreieck ABC auf dem Rand (beziehungsweise im Inneren) des Seitenmittendreiecks des Dreiecks ABC liegen (Satz 13). Weitere notwendige und hinreichende Bedingungen dafür werden in den Sätzen 14 bis 17 angegeben.
- Der ebene Sachverhalt lässt sich in den 3-dimensionalen Raum übertragen (Sätze 18 und 19).

1. Der Satz von Apollonios und etwas noch dazu

(oder: Der Apollonioskreis – eine Aufgabe zu zwei Punkten und zwei Zahlen)

Im 6. Buch von Euklids Elementen, § 3, findet sich ein Satz, den man heute folgendermaßen formuliert.

Satz 1. *Eine Innenwinkelhalbierende eines Dreiecks teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.*



$$\gamma_1 = \gamma_2 \Rightarrow \overline{TA} : \overline{TB} = \overline{CA} : \overline{CB}$$

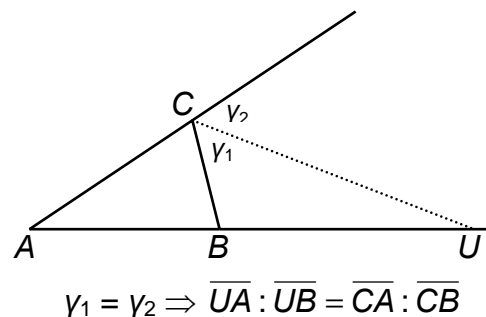
Clemens Thaer (1883-1974), der Übersetzer und Herausgeber der klassischen Euklidausgabe

¹ Die Arbeit wurde teilweise durch den CZ-Grant VZ-J13/98:114100004 unterstützt.

² Pierre René Jean-Baptiste Henri Brocard (1845-1922)

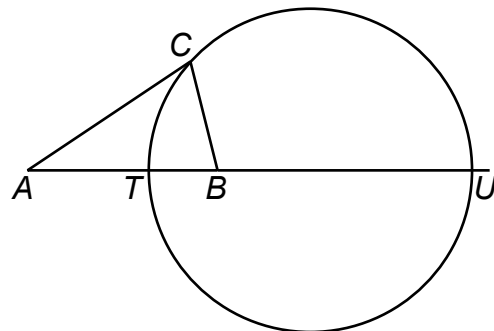
in deutscher Sprache (7), merkt dazu an:

Den entsprechenden Satz über die Halbierende des Außenwinkels hat Euklid nicht aufgenommen; bekannt wird er gewesen sein; der sogenannte Kreis des Apollonios findet sich schon bei Aristoteles erwähnt.



Ohne näheren Kommentar sieht Thaer einen direkten Zusammenhang zwischen dem Satz bei Euklid und dem nach Apollonios von Perga (etwa 262 – 190 v. Chr.) benannten, aber bereits von Aristoteles (1, Buch III, Kapitel 5)³ formulierten

Satz 2. *Der geometrische Ort der Punkte, deren Abstände von zwei verschiedenen gegebenen Punkten ein von 1 verschiedenes gegebenes Verhältnis haben, ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt auf der Verbindungsgeraden der gegebenen Punkte.*



Der von Thaer nicht explizit ausgesprochene Zusammenhang zwischen den Sätzen 1 und 2 beruht auf folgender Überlegung. In einer Ebene seien zwei verschiedene Punkte A und B gegeben sowie ein Punkt T auf der Geraden AB zwischen den Punkten A und B . Man fragt nach den Punkten C der Ebene, derart dass die Winkelhalbierende des Dreiecks ABC durch die Ecke C die Gegenseite im Punkt T trifft. Nach Satz 1 sind diese Punkte bestimmt durch das Abstandsverhältnis

$$\overline{CA} : \overline{CB} = \overline{TA} : \overline{TB}.$$

Diese Punkte liegen nach Satz 2 auf dem Kreis zu dem festen Abstandsverhältnis $\overline{TA} : \overline{TB}$. Dieser Kreis schneidet die Gerade AB in T und in dem Punkt U , der die Strecke $[AB]$ außen im angegebenen Verhältnis teilt; dann ist es der Thaleskreis über der Strecke $[TU]$.

³ Aristoteles benutzt diese Aussage in der Meteorologie zur Begründung der Tatsache, dass ein Regenbogen weder einen Vollkreis bilden kann, noch einen Bogen, der größer ist als ein Halbkreis.

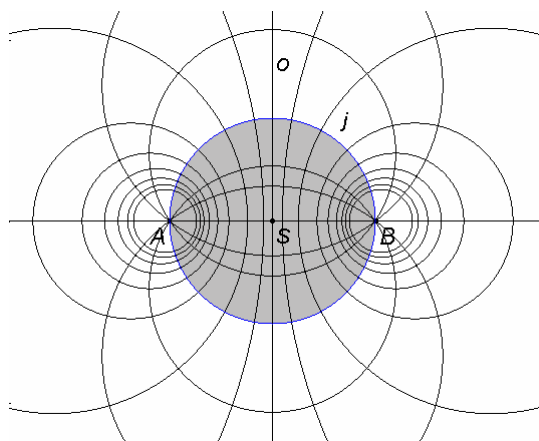
Sind nun allgemein A und B zwei verschiedene Punkte und ist $a : b$ ein Verhältnis mit verschiedenen positiven reellen Zahlen a und b , so konstruiert man die Punkte T und U , die die Strecke $[AB]$ innen und außen im Verhältnis $a : b$ teilen. Der Apollonioskreis $k(A, B, a, b)$ ist der Thaleskreis über der Strecke $[TU]$, das heißt, der eindeutig bestimmte Kreis, der die Strecke $[TU]$ als Durchmesser besitzt; er ist in klassischer Weise mit Zirkel und Lineal konstruierbar. Der Mittelpunkt teilt Strecke $[AB]$ außen im Verhältnis $a^2 : b^2$. Die Cabri-Geometrie, eine dynamische Geometrie-Software (DGS), ermöglicht die Herstellung eines sogenannten Makros, das zu Punkten A und B und Strecken der Längen a und b den Apollonioskreis $k(A, B, a, b)$ in einem Schritt konstruiert; dieses Makro sei nach seinem Paten Apollonios benannt. Man kann es so definieren, dass es auch im Fall $a = b$ ein Ergebnis liefert, und zwar eine Gerade, die Mittelsenkrechte der Strecke $[AB]$, die man als Kreis mit der Krümmung 0 und dem Punkt ∞ als Mittelpunkt auffasst⁴.

Für die Gesamtheit der Apollonioskreise zu festen Punkten A und B , aber variablen Verhältnissen $a : b$ gilt (9, Korollar f. in Nummer 58, Seite 39):

Satz 3. Sind A und B verschiedene Punkte, so bildet die Menge aller Apollonioskreise $k(A, B, a, b)$, wobei das Verhältnis $a : b$ alle positiven reellen Zahlen durchläuft, ein hyperbolisches Kreisbüschel⁵ mit den Grenzpunkten A und B .

Das hyperbolische Kreisbüschel mit den Grenzpunkten A und B ist konjugiert zu dem elliptischen Kreisbüschel mit den Grundpunkten A und B (9, Korollar in Nummer 55, Seite 37).

Bemerkungen. Zur Illustration sei ein Paar konjugierter Kreisbüschel explizit vorgestellt. Wir betrachten in der euklidischen Ebene zwei Punkte A und B im Abstand 2. Das elliptische Kreisbüschel mit den Grundpunkten A und B besteht aus den Kreisen mit den Mittelpunkten auf der Mittelsenkrechten der Strecke $[AB]$, in Bezug auf die der Mittelpunkt S der Strecke $[AB]$ die Potenz -1 hat, das hyperbolische Kreisbüschel mit den Grenzpunkten A und B aus den Kreisen mit den Mittelpunkten auf der Geraden AB , in Bezug auf die der Mittelpunkt S der Strecke $[AB]$ die Potenz +1 hat.



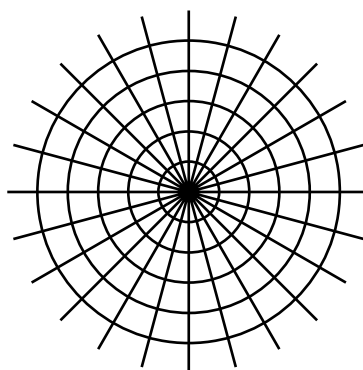
⁴ Wir stellen uns auf den Standpunkt der Möbiusgeometrie, bei der die euklidische Ebene durch einen unendlichen Punkt abgeschlossen wird.

Paare konjugierter Kreisbüschel sind auch Nichtmathematikern wohl vertraut. Beim geographischen Globus bilden die Längengrade (Meridiane) ein elliptisches Büschel mit den Polen als Grundpunkten und die Breitenkreise ein hyperbolisches Büschel mit den Polen als Grenzpunkten. Bei stereographischer Projektion von einem Äquatorpunkt aus erhält man das übliche hier gezeigte Bild konjugierter Kreisbüschel. In vielen Atlanten findet man eine Darstellung der gesamten Erdoberfläche in der folgenden Form⁶:



Die als kugelförmig angenommene Erdoberfläche wird durch zwei zusammen einen Großkreis bildende Meridiane, einen durch den Atlantik, den anderen durch den Pazifik in zwei Halbkugeln zerlegt. Dann wird jede dieser Halbkugeln stereographisch von dem auf dem Äquator liegenden Mittelpunkt der anderen Halbkugel aus in die von den beiden Meridianen berandete Kreisfläche projiziert. Man erkennt die Breitenkreise als hyperbolisches Büschel und die Meridiane als Teile von Kreisen eines elliptischen Büschels⁷.

Bei stereographischer Projektion von einem Pol aus gehen die Meridiane in ein Geradenbüschel, die Breitenkreise in ein Büschel konzentrischer Kreise (hyperbolisches Ausnahmebüschel (3, 2.7)) über.



Da die Kreise konjugierter Kreisbüschel zueinander orthogonal sind, folgt aus Satz 3 noch die für unsere Zwecke wichtige Aussage:

Satz 4. Jeder Apollonioskreis $k(A, B, a, b)$ ist orthogonal zu jedem Kreis, der die Strecke $[AB]$

⁵ Die Begriffe *elliptisches*, *parabolisches* und *hyperbolisches* Kreisbüschel werden im Sinne von (3) benutzt.

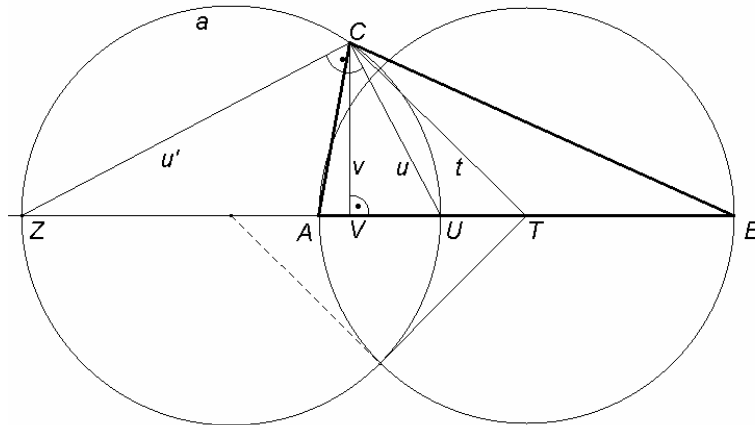
⁶ aus (5) entnommen mit freundlicher Genehmigung des Westermann Schulbuchverlages GmbH.

⁷ gegenüber der vorigen Figur um 90° gedreht.

als Sehne enthält.

Bevor wir uns unserem eigentlichen Anliegen zuwenden, wollen wir mit den vorgestellten geometrischen Hilfsmitteln eine klassische Konstruktionsaufgabe lösen.

Aufgabe. Ein Dreieck ABC ist zu konstruieren, von dem die Höhe v , die Winkelhalbierende u und Seitenhalbierende t durch die Ecke C gegeben sind. *Lösung.* Mit V, U, T seien der Höhenfußpunkt der Höhe durch C , der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch C und der



Mittelpunkt der Seite $[AB]$ des gesuchten Dreiecks ABC bezeichnet. Das Dreieck CUV ist rechtwinklig, seine Hypotenuse u und eine Kathete, nämlich v , sind bekannt; mit diesen Daten wird es konstruiert. Der Punkt T ergibt sich nun als Schnittpunkt des Kreises um C mit Radius t und der von V ausgehenden Halbgeraden durch U . Da die äußere Winkelhalbierende durch C auf der Geraden CU senkrecht steht, wird sie als Lot zur Geraden CU durch C errichtet. Sie schneidet die Gerade ZU in dem Punkt Z . Der Thaleskreis a über der Strecke $[ZU]$ gehört zu dem hyperbolischen Kreisbüschel mit den Grenzpunkten A und B . Der Thaleskreis über der Strecke $[AB]$ mit Mittelpunkt T ist nach Satz 4 orthogonal zu dem Kreis a ; er gehört zu dem konjugierten elliptischen Kreisbüschel. Also wird erst der Kreis a konstruiert und dann der dazu orthogonale Kreis mit dem Mittelpunkt T . Dieser Kreis schneidet die Gerade UV in den gesuchten Ecken A und B .

Determination. Die Aufgabe hat eine bis auf Kongruenz eindeutige Lösung, falls $t > u > v$. Im Falle $t = u = v$ gibt es unendliche gleichschenklige Dreiecke als Lösungen. In den übrigen Fällen existiert keine Lösung.

2. Ein Satz über drei Apollonioskreise

(Oder: Eine Aufgabe zu drei Punkten und drei Zahlen)

Nun soll aber mit dem Entdecken begonnen werden.

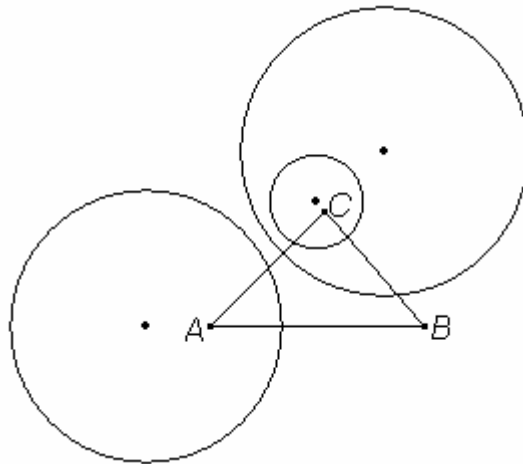
Gegeben seien drei Punkte A, B und C , die nicht auf einer Geraden liegen, also ein Dreieck bilden, und drei positive reelle Zahlen a, b und c .

Gibt es Punkte, deren Abstandsverhältnis zu den Ecken des Dreiecks $a : b : c$ beträgt?
 Wenn ja, wie viele solcher *Apolloniospunkte* gibt es?

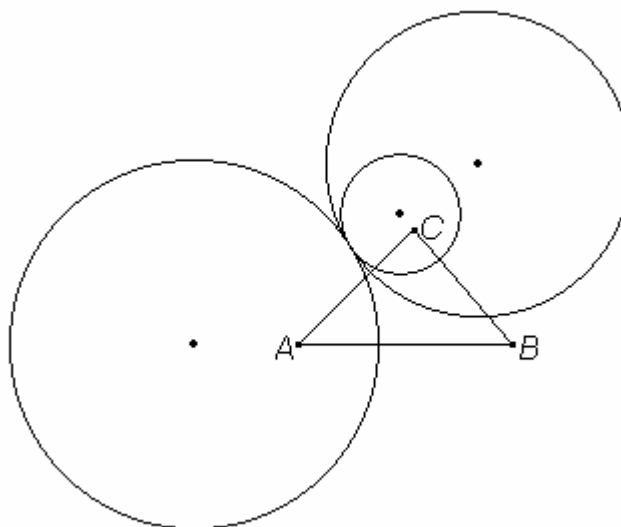
Das ist die Frage nach dem Durchschnitt von drei Apollonioskreisen:

$$k(A,B,a,b) \cap k(B,C,b,c) \cap k(C,A,c,a).$$

Dieser Frage können Schüler und Studenten zunächst einmal experimentell nachgehen, mit Hilfe von *Cabri*-Geometrie und dem speziell konstruierten Makro Apollonios. Es zeigen sich die folgenden Möglichkeiten:



Hier ist der Durchschnitt der drei Apollonioskreise leer, aber ihre Mittelpunkte scheinen auf einer Geraden zu liegen, was man mit der *Cabri*-Abfrage „kollinear?“ bestätigen kann⁸. Dabei kann man gleich bemerken, dass die Mittelpunkte jeweils auf den Verlängerungen von Dreiecksseiten liegen, aber von den Ecken verschieden sind. Also sind die Mittelpunkte der drei Kreise auf jeden Fall paarweise verschieden und damit kann ein nichtleerer Durchschnitt höchstens aus zwei Punkten bestehen. Das folgende Bild zeigt eine andere Möglichkeit:

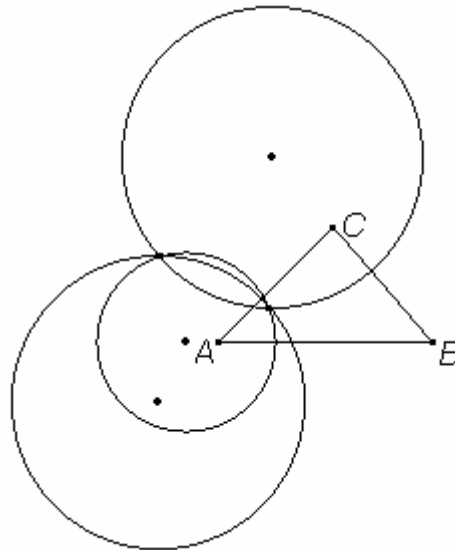


Hier berühren sich die drei Apollonioskreise paarweise; man hat einen Apolloniospunkt. Hier

⁸ Dies kann außerdem mit dem so genannten Satz von Menelaos leicht begründet werden, was aber hier nicht unbedingt notwendig ist. Menelaos von Alexandria lebte um 100 nach Christus in Rom.

ist klar, dass die Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, mehr noch: die drei Kreise gehören zu einem parabolischen Kreisbüschel mit der gemeinsamen Tangente als Achse.

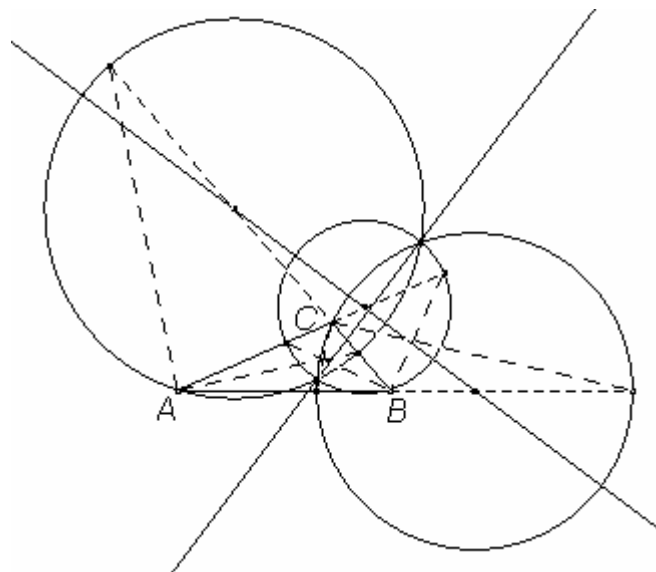
Schließlich findet man:



Die drei Apollonioskreise schneiden sich in zwei Punkten, den Grundpunkten eines elliptischen Kreisbüschels, zu denen sie gehören. Hierzu gehört der klassische Fall der Apollonioskreise eines Dreiecks, die man durch die Festsetzungen

$$a = \frac{1}{|BC|}, \quad b = \frac{1}{|CA|}, \quad c = \frac{1}{|AB|}$$

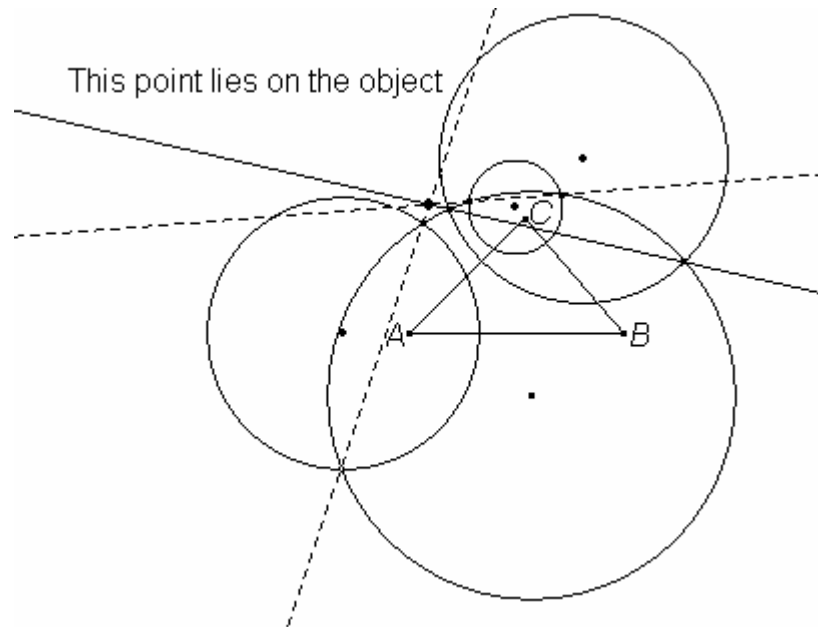
erhält. Die Grundpunkte des Büschels, in den sich die Kreise schneiden, sind die *isodynamischen Punkte* des Dreiecks (9, Nummer 492, Seite 295/6), die Achse ist die so genannte *Brocard-Achse*, die Verbindungsgerade die *Lemoinesche Gerade*⁹ (9, Nummer 490, Seiten294/5):



Die heuristischen Ergebnisse des zweiten und dritten Falles lassen vermuten, dass auch im ersten Fall die drei Apollonioskreise zu einem Kreisbüschel gehören. Das kann man zunächst

⁹ Émile Michel Hyacinthe Lemoine (1840-1912)

experimentell mit *Cabri* nachprüfen, in dem man zeigt, dass es einen Punkt gibt, der in Bezug auf alle drei Kreise die gleiche Potenz hat. Dazu wählt man einen Kreis, der alle drei Kreise in zwei Punkten schneidet und stellt *Cabri* die Frage, ob sich die Verbindungsgeraden der drei so erhaltenen Punktepaare in einem Punkt schneiden¹⁰.



Damit hat man den folgenden Satz, den man nun auch formal beweisen sollte.

Satz 5. Sind A , B und C nicht kollineare Punkte und a , b , c positive reelle Zahlen, so gehören die Apollonioskreise $K_{AB} = k(A, B, a, b)$, $K_{BC} = k(B, C, b, c)$, $K_{CA} = k(C, A, c, a)$ zu einem Kreisbüschel, dem Apolloniosbüschel $B(A, B, C, a, b, c)$.

Beweis (mit Hilfe von komplexen Zahlen): Ein komplexes Koordinatensystem wird so gewählt, dass der Umkreis des Dreiecks ABC der Einheitskreis der komplexen Zahlenebene ist. Für die komplexen Koordinaten α , β , γ der Ecken gilt dann

$$\alpha \cdot \bar{\alpha} = \beta \cdot \bar{\beta} = \gamma \cdot \bar{\gamma} = 1$$

Zuerst wird der Fall betrachtet, in dem die Verhältniszahlen a , b , c , paarweise verschieden sind. Für den Kreis K_{AB} setzt man die Gleichung

$$|\zeta - \alpha| : |\zeta - \beta| = a : b$$

an, aus der man durch einfache Umformungen, eventuell mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems (CAS), erhält

$$k_{AB} = \zeta \cdot \bar{\zeta} + \frac{(b^2 \cdot \bar{\alpha} - a^2 \cdot \bar{\beta}) \cdot \zeta + (b^2 \cdot \alpha - a^2 \cdot \beta) \cdot \bar{\zeta}}{a^2 - b^2} + 1 = 0.$$

Analog berechnet man:

¹⁰ Die aktuelle Version von Cabri erlaubt diese Frage allerdings nicht direkt. Man kann die gewünschte Antwort aber erhalten, in dem man fragt, ob der Schnittpunkt von zwei der Geraden auf der dritten liegt.

$$k_{BC} = \zeta \cdot \bar{\zeta} + \frac{(c^2 \cdot \bar{\beta} - b^2 \cdot \bar{\gamma}) \cdot \zeta + (c^2 \cdot \beta - b^2 \cdot \gamma) \cdot \bar{\zeta}}{b^2 - c^2} + 1 = 0$$

und

$$k_{CA} = \zeta \cdot \bar{\zeta} + \frac{(a^2 \cdot \bar{\gamma} - c^2 \cdot \bar{\alpha}) \cdot \zeta + (a^2 \cdot \gamma - c^2 \cdot \alpha) \cdot \bar{\zeta}}{c^2 - a^2} + 1 = 0.$$

Aus der Beziehung

$$c^2 \cdot (a^2 - b^2) \cdot k_{AB} + a^2 \cdot (b^2 - c^2) \cdot k_{BC} + b^2 \cdot (c^2 - a^2) \cdot k_{CA} = 0$$

folgt nun, dass die drei Kreise zu einem Kreisbündel gehören. Damit ist dieser Fall erledigt.

Ist nun etwa $a = b \neq c$, so ist K_{AB} die Mittelsenkrechte der Dreiecksseite $[AB]$, die natürlich durch den Umkreismittelpunkt, also den Ursprung des Koordinatensystems, geht. Sie hat die Gleichung

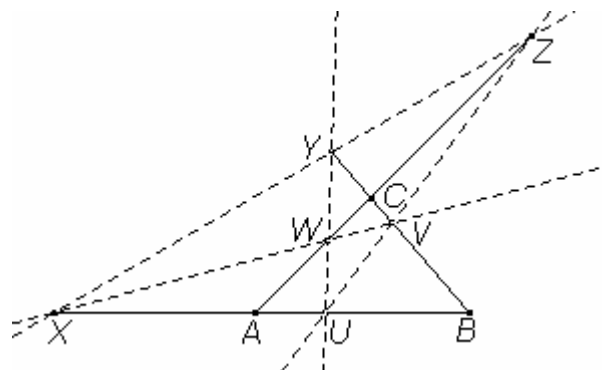
$$k_{AB} = (\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \cdot \zeta + (\alpha - \beta) \cdot \bar{\zeta} = 0.$$

$$c^2 \cdot k_{AB} + (a^2 - c^2) \cdot k_{BC} + (c^2 - a^2) \cdot k_{CA} = 0,$$

woraus die Behauptung auch für diesen Fall folgt.

Ist schließlich $a = b = c$, so hat man die drei Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC , die zu dem Bündel der Ursprungsgeraden gehören, dass als elliptisches Kreisbündel aus Kreisen der Krümmung 0 mit den Grundpunkten 0 und ∞ aufgefasst wird. *qed*

Dies ist ein Beweis im Sinne der analytischen Geometrie, der leicht zu führen ist, wenn man um die geometrische Bedeutung der komplexen Zahlen weiß, aber nicht viel geometrische Einsichten bringt. Ein synthetischer Beweis ist möglich durch Zurückführung der Behauptung auf den so genannten Satz von Bodenmiller¹¹ (8). Dazu seien U, V, W die Punkte, die die Seiten $[AB], [BC], [CA]$ des Dreiecks ABC innen in den Verhältnissen $a : b, b : c, c : a$ teilen und X, Y, Z die entsprechenden äußeren Teilungspunkte.



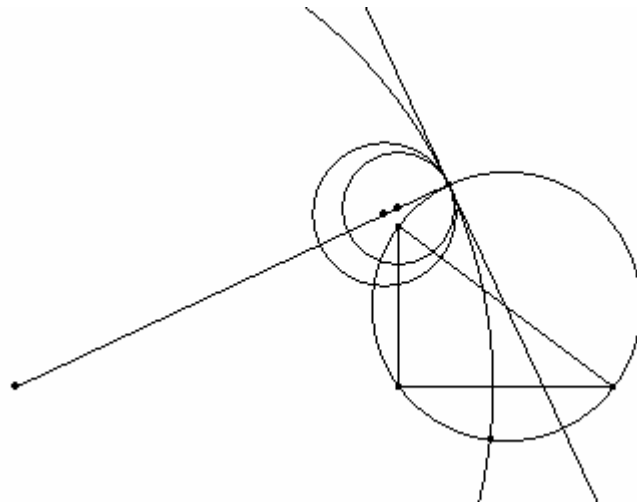
Nach dem Satz von Menelaos sind jeweils die Punktetripel

$$(U, V, Z), \quad (U, Y, W), \quad (X, V, W), \quad (X, Y, Z)$$

¹¹ Johann Bodemiller (* 1785 oder 1786, † nach 1831), Mathematiklehrer in Cleve.

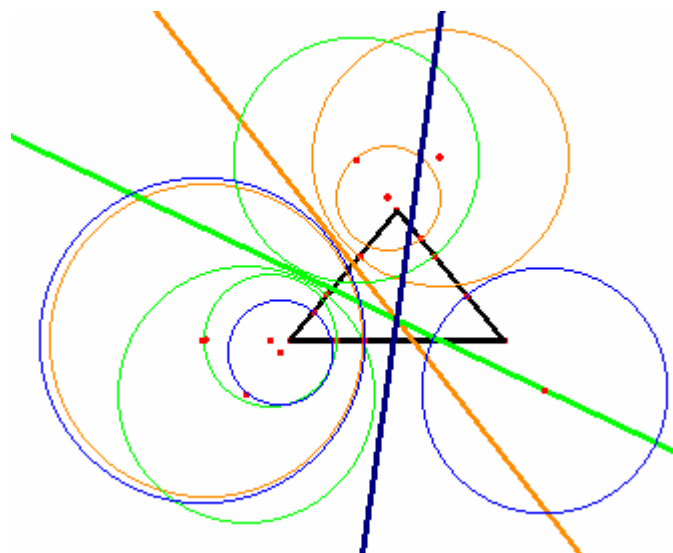
kollinear. Die vier zugehörigen Geraden bilden ein vollständiges Vierseit, dessen Bodenmillerkreise gerade die hier betrachteten Apollonioskreise sind; sie gehören nach dem Satz von Bodenmiller zu einem Kreisbüschel. Aufmerksame Leser können feststellen, dass man auch umgekehrt den Satz von Bodenmiller auf den hier diskutierten Satz 5 zurückführen könnte.

Bemerkung. Die bisher gezeigten Bilder lassen die Vermutung aufkommen, dass die Mittelpunkte der Apollonioskreise K_{AB} , K_{BC} , K_{CA} sich auf beide Seiten der Achse des zugehörigen Kreisbüschels verteilen. Dies können Schüler und Studenten experimentell widerlegen.



Das Bild zeigt einen parabolischen Fall mit den Mittelpunkten auf einer Seite der Achse. Es ist klar, dass man durch leichtes Variieren der Verhältnisse denselben Effekt elliptisch und hyperbolisch erzeugen kann.

Als nächstes kann man die Frage nach der Lage der Achsen der zu einem Dreieck gehörenden Apolloniosbüschel stellen. Auch diese können Schüler und Studenten erst einmal experimentell untersuchen, etwa unter zur Hilfenahme eines weiteren *Cabri-Makros Achse*, das zu zwei Kreisen mit verschiedenen Mittelpunkten und verschiedenen Radien die Achse des von ihnen erzeugten Kreisbüschels erzeugt. Die Achse konstruiert man als Potenzgerade, um auch den Fall zu erfassen, in dem sich die beiden Kreise meiden. Der experimentelle Befund liefert,



dass diese Achsen alle einen Punkt gemeinsam haben, also zu einem Geradenbüschel gehören. Um welchen Punkt handelt es sich dabei? Zunächst kann man eine Plausibilitätsüberlegung anstellen. Im Fall $a = b = c$ ist jedes Element des Büschels Achse und eine Gerade durch den Umkreismittelpunkt. Also ist dieser Punkt ein Kandidat für den gesuchten Punkt.

Die formale Antwort findet man mit Hilfe von Satz 4. Es gilt:

Satz 6. *Die Achsen der zu einem Dreieck gehörenden Apolloniosbüschel bilden das Geradenbüschel, dessen Träger der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ist.*

Beweis. Nach Satz 4 ist der Umkreis des Dreiecks orthogonal zu allen auftretenden Apollonioskreisen. Damit liegt der Umkreismittelpunkt auf allen Achsen der Apolloniosbüschel (9, Korollar in Nummer 55, Seite 37). *qed*

Diese Aussage lässt sich noch verschärfen.

Satz 7. *Jede Gerade durch den Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ist Achse eines zu dem Dreieck gehörigen nicht entarteten elliptischen Apolloniosbüschels.*

Beweis. Es seien ein Dreiecks ABC und eine Gerade g durch den Umkreismittelpunkt des Dreiecks gegeben. Man wähle einen Punkt P auf der Geraden g außerhalb des Umkreises. Setzt man nun

$$a = |PA|, b = |PB|, c = |PC|,$$

dann liegt der Punkt P im Schnitt der Apollonioskreise $K_{AB} = k(A, B, a, b)$, $K_{BC} = k(B, C, b, c)$, $K_{CA} = k(C, A, c, b)$. Da diese Kreise orthogonal zum Umkreis sind, werden sie bei der Inversion am Umkreis in sich selbst abgebildet, und damit ist der von P verschiedene Bildpunkt Q unter der Inversion ebenfalls ein gemeinsamer Punkt dieser Apollonioskreise. Das zugehörige Kreisbüschel ist elliptisch und hat die Grundpunkte P und Q . Die Gerade g ist eine Fixgerade unter der Inversion und enthält damit auch den Punkt Q . Also ist $g = PQ$ Achse eines elliptischen Kreisbüschels. *qed*

Einige Überlegungen aus dem voranstehenden Beweis verdienen eine eigenständige Beachtung.

Satz 8. *Jeder von den Ecken eines Dreiecks verschiedene Punkt ist Apolloniospunkt, Grundpunkt eines zu dem Dreieck gehörenden Apolloniosbüschels. qed*

Weiter hat man:

Satz 9. *Die Grundpunkte eines elliptischen Apolloniosbüschels werden unter der Inversion am Umkreis des zugrundeliegenden Dreiecks miteinander vertauscht. qed*

Satz 10. *Ein Apolloniosbüschel ist genau dann parabolisch, wenn es einen auf dem Umkreis des betrachteten Dreiecks liegenden Grundpunkt besitzt. qed*

Diese Sätze leiten über zu der interessanten Frage, die eine Umformulierung des ursprünglichen Problems darstellt: Für welche Verhältnisse $a : b : c$ ist bei gegebenem Dreieck ABC

das Apolloniosbüschel $B(A,B,C,a,b,c)$ elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch? Um eine gute Vorstellung von den entsprechenden Mengen dieser Verhältnisse zu bekommen, kann man sie – da es auf einen gemeinsamen Faktor nicht ankommt – als baryzentrische, oder besser noch als trilineare Koordinaten¹² von Punkten innerhalb des Dreiecks ABC auffassen.

3. Klassifikation der Apolloniosbüschel

Zunächst seien zwei Spezialfälle als Beispiele genannt:

dem Büschel der Geraden durch den Umkreismittelpunkt wird baryzentrisch der Schwerpunkt und trilinear der Inkreismittelpunkt zugeordnet;
dem klassischen Apolloniosbüschel mit

$$a = \frac{1}{|BC|}, \quad b = \frac{1}{|CA|}, \quad c = \frac{1}{|AB|}$$

wird baryzentrisch der zum Inkreismittelpunkt isotomisch konjugierte Punkt (6, Section 2b., Case 2) und trilinear der Schwerpunkt zugeordnet.

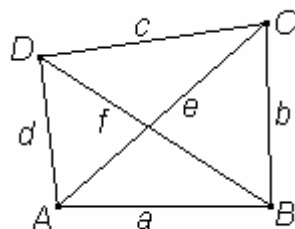
Damit hat man eine bijektive Beziehung zwischen den inneren Punkten des Dreiecks ABC und den zu diesem Dreieck gehörenden Apolloniosbüscheln.

Einen wichtigen Schlüssel zu dem hier angesprochenen Problem liefert ein weiterer Grieche, Klaudios Ptolemaios (etwa 100 bis 160 n. Chr.). Von ihm stammt die folgende Charakterisierung der Sehnenvierecke (4, Abschnitt 2.6).

Satz 11. *Ein konvexes Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der Paare von Gegenseiten ist, in Formeln:*

$$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d,$$

wobei die Bezeichnungen in folgender Zeichnung erklärt sind:



¹² Ein Punkt der Ebene wird *baryzentrisch* durch das Verhältnis der orientierten Flächen der drei Dreiecke beschrieben, in die das Ausgangsdreieck durch die Verbindungsstrecken dieses Punktes mit den Ecken „zerlegt“ wird, und *trilinear* durch das Verhältnis seiner orientierten Abstände von den Seiten des Ausgangsdreiecks. Innere Punkte des Dreiecks sind die Punkte, deren baryzentrische oder trilineare Koordinaten gleiches Vorzeichen haben. (5, Section 2a.)

In (4, Abschnitt 2.6) findet sich noch der folgende Zusatz:

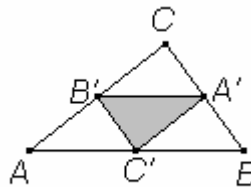
Satz 12. *Ist P ein Punkt, der nicht auf dem von B und C begrenzten Bogen des Umkreises des Dreiecks ABC liegt, so gilt:*

$$|PA| \cdot |BC| < |PB| \cdot |CA| + |PC| \cdot |AB|.$$

Der Zusammenhang dieser Aussage mit dem Satz von Ptolemaios besteht darin, dass die Voraussetzung besagt: das Viereck $ABPC$ ist kein konvexes Sehnenviereck.

Damit lässt sich beweisen:

Satz 13. *Es sei ABC ein Dreieck. Dann liegen die Punkte, deren trilineare Koordinaten elliptischen Apolloniosbüscheln entsprechen, im Inneren des Seitenmittendreiecks, während zu parabolischen Apolloniosbüscheln Punkte auf dem Rand des Seitenmittendreiecks gehören.*



Folgerung. *Alle Punkte im Innern des Dreiecks ABC , aber außerhalb des Seitenmittendreiecks gehören damit zu hyperbolischen Apolloniosbüscheln.*

Beweis von Satz 13. Mit A' , B' , C' seien die Mittelpunkte der Seiten $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ bezeichnet; sie haben die folgenden trilinearen Koordinaten

$$A' : (0, |AB|, |CA|), \quad B' : (|AB|, 0, |BC|), \quad C' : (|CA|, |BC|, 0).$$

Damit ergeben sich für die Seiten des Seitenmittendreiecks die Gleichungen:

$$A'B' : |BC| \cdot x + |CA| \cdot y - |AB| \cdot z = 0,$$

$$A'C' : |BC| \cdot x - |CA| \cdot y + |AB| \cdot z = 0,$$

$$B'C' : -|BC| \cdot x + |CA| \cdot y + |AB| \cdot z = 0.$$

Die inneren Punkte des Seitenmittendreiecks sind die Punkte, deren trilineare Koordinaten x , y , z so gewählt werden können, dass gilt

$$x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0,$$

$$|BC| \cdot x + |CA| \cdot y > |AB| \cdot z, \quad |BC| \cdot x + |AB| \cdot z > |CA| \cdot y, \quad |CA| \cdot y + |AB| \cdot z > |BC| \cdot x.$$

Nun sei $B(A, B, C, a, b, c)$ ein elliptisches Apolloniosbüschel zum Dreieck ABC und P der im Inneren des Umkreises liegende Grundpunkt (=Apolloniospunkt); dann gilt:

$$a = t \cdot |PA|, \quad b = t \cdot |PB|, \quad c = t \cdot |PC|,$$

wobei t eine positive reelle Zahl bezeichnet. Der Punkt P erfüllt die Voraussetzung des Satzes 12 für alle drei Kreisbögen, in die der Umkreis durch die Ecken des Dreiecks zerlegt wird.

Multipliziert man nun die aus Satz 12 folgenden Ungleichungen mit t , so erhält man die eben angegebene Bedingung dafür, dass a , b , c die trilinearen Koordinaten eines im Inneren des Seitenmittendreiecks gelegenen Punktes sind.

Schließlich sei $B(A,B,C,a,b,c)$ ein parabolisches Apolloniosbüschel. Dann liegt der zugehörige Apolloniospunkt P nach Satz 10 auf dem Umkreis des Dreiecks ABC und es gilt wieder:

$$a = t \cdot |PA|, \quad b = t \cdot |PB|, \quad c = t \cdot |PC|$$

mit einer positiven reellen Zahl t . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass das Dreieck ABC positiv orientiert ist und P auf dem von B und C begrenzten Kreisbogen liegt. Dann ist $ABPC$ ein konvexes Sehnenviereck mit den Seiten $|AB|$, $|BP|$, $|PC|$, $|CA|$ und den Diagonalen $|PA|$, $|BC|$. Aus dem Satz von Ptolemaios (Satz 11) folgt zunächst

$$|PA| \cdot |BC| = |PC| \cdot |AB| + |PB| \cdot |CA|;$$

multipliziert man diese Gleichung mit t , so erhält man

$$a \cdot |BC| = c \cdot |AB| + b \cdot |CA|.$$

Das bedeutet, dass der Punkt mit den trilinearen Koordinaten a , b , c auf der Geraden $B'C'$ liegt. *qed*

Bemerkung. Man kann den Inhalt des Satzes 13 auch mit Hilfe der Dreiecksungleichung ausdrücken:

Ist das Apolloniosbüschel $B(A,B,C,a,b,c)$ elliptisch, so erfüllen die drei Produkte $a \cdot |BC|$, $b \cdot |CA|$, $c \cdot |AB|$ die Dreiecksungleichung, das heißt, das größte unter ihnen ist kleiner als die Summe der beiden anderen.

Ist das Apolloniosbüschel $B(A,B,C,a,b,c)$ parabolisch, so ist das größte der drei Produkte $a \cdot |BC|$, $b \cdot |CA|$, $c \cdot |AB|$ gleich der Summe der beiden anderen.

Im folgenden geht es nun darum, die Umkehrung dieser Aussagen zu zeigen.

Satz 14. *Ein Apolloniosbüschel $B(A,B,C,a,b,c)$ ist genau dann parabolisch, wenn das größte unter den Produkten $a \cdot |BC|$, $b \cdot |CA|$, $c \cdot |AB|$ gleich der Summe der beiden anderen Produkte ist.*

Beweis. Dass die angegebene Bedingung notwendig ist, folgt aus Satz 13.

Sei umgekehrt ein Apolloniosbüschel $B(A,B,C,a,b,c)$ mit

$$a \cdot |BC| = c \cdot |AB| + b \cdot |CA|.$$

gegeben. In dem komplexen Koordinatensystem, das im Beweis von Satz 5 eingeführt wurde, erhält man durch geeignetes zweifaches Quadrieren die Beziehung:

$$(a^2 \cdot \alpha \cdot (\beta^2 - \gamma^2) + b^2 \cdot \beta \cdot (\gamma^2 - \alpha^2) + c^2 \cdot \gamma \cdot (\alpha^2 - \beta^2))^2 =$$

$$= 4 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot (\alpha^2 \cdot (\beta - \gamma) + b^2 \cdot (\gamma - \alpha) + c^2 \cdot (\alpha - \beta)) \cdot (\alpha^2 \cdot \alpha \cdot (\beta - \gamma) + b^2 \cdot \beta \cdot (\gamma - \alpha) + c^2 \cdot \gamma \cdot (\alpha - \beta)).$$

Diese Gleichung ist symmetrisch in den Variablen; es kommt also nicht darauf an, welches der drei Produkte $a \cdot |BC|$, $b \cdot |CA|$, $c \cdot |AB|$ das größte ist. Man erkennt nun, dass

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{a^2 \cdot \alpha \cdot (\beta^2 - \gamma^2) + b^2 \cdot \beta \cdot (\gamma^2 - \alpha^2) + c^2 \cdot \gamma \cdot (\alpha^2 - \beta^2)}{a^2 \cdot \alpha \cdot (\beta - \gamma) + b^2 \cdot \beta \cdot (\gamma - \alpha) + c^2 \cdot \gamma \cdot (\alpha - \beta)}$$

ein Punkt auf dem Einheitskreis ist, der den im Beweis zu Satz 5 angegebenen Gleichungen genügt, also Apolloniospunkt des gegebenen Apolloniosbüschels, das nach Satz 10 parabolisch ist. *qed*

Satz 15. Ein Apolloniosbüschel $B(A, B, C, a, b, c)$ ist genau dann elliptisch, wenn die drei Produkte $a \cdot |BC|$, $b \cdot |CA|$, $c \cdot |AB|$ die Dreiecksungleichung erfüllen.

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ergibt sich wieder aus Satz 13.

Für die Umkehrung werden die Bezeichnungen aus Satz 13 und dem Beweis von Satz 14 verwendet, ebenso das eingeführte komplexe Koordinatensystem. Die Abbildung Φ , die jedem Punkt P des abgeschlossenen Einheitskreises den Punkt mit den trilinearen Koordinaten $|AP|$, $|BP|$, $|CP|$ in Bezug auf das Dreieck ABC zuordnet, ist stetig und nimmt aufgrund der Sätze 11 und 12 ihre Werte im abgeschlossenen Seitenmittendreieck an. Es ist zu zeigen, dass diese Abbildung surjektiv ist.

Die im Beweis von Satz 14 definierte Zuordnung $B(A, B, C, a, b, c) \mapsto \delta$ lässt sich als stetige Abbildung Ψ auffassen, die den Rand des Dreiecks $A'B'C'$ bijektiv auf den Umkreis des Dreiecks ABC abbildet. Wäre nun Φ nicht surjektiv, so gäbe es eine Retraktion Ω von Bild Φ auf den Rand des Dreiecks $A'B'C'$, die Verkettung $\Psi \Omega \Phi$ wäre definiert und ergäbe eine stetige Retraktion der Einheitskreisfläche auf den Rand, die Einheitskreislinie; eine solche Retraktion gibt es aber nicht (14, Satz I.8.2, Seite 73). *qed*

Bemerkungen.

1. Bei Verwendung von baryzentrischen Koordinaten kann man genau so argumentieren, nur wird das Seitenmittendreieck durch ein etwas kompliziertes Dreieck ersetzt. Fasst man

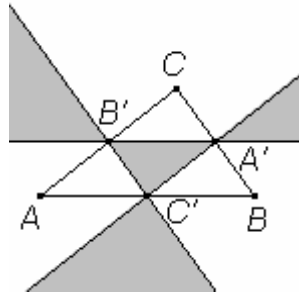
$$A' : (0, |AB|, |CA|), B' : (|AB|, 0, |BC|), C' : (|CA|, |BC|, 0)$$

als Darstellung in baryzentrischen Koordinaten auf, so ist nach Satz 1 A' der Punkt, den man erhält, wenn man den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch die Ecke A am Mittelpunkt der Seite $[BC]$ spiegelt; B' und C' haben die entsprechende geometrische Bedeutung.

2. Die Untersuchung der Frage, welche Teile des Seitenmittendreiecks zu den Apolloniosbüscheln gehören, deren erzeugende Kreise den Mittelpunkt auf der gleichen Seite der Achse haben, bleibt weiterer experimenteller Beschäftigung mit der Konfiguration überlassen.

3. Es seien a, b, c die trilinearen Koordinaten eines inneren Punktes des Winkelfeldes eines Scheitelwinkels zu einem inneren Winkel des Dreiecks $A'B'C'$. Dann ist das Apolloniosbüschel $B(A, B, C, |a|, |b|, |c|)$ elliptisch. Diese Aussage erhält man durch eine leichte Abänderung der Beweise der Sätze 13 und 15 sowie durch die folgende Beobachtung:

Für $a < 0 < b, c$ ist $c \cdot |AB| + b \cdot |CA| - |a| \cdot |BC| = t \cdot F > 0$, wobei t noch einmal eine positive reelle Zahl und F die Fläche des Dreiecks ABC bezeichnet.



4. Der Symmedianpunkt (oder Lemoinesche Punkt) eines Dreiecks hat die trilinearen Koordinaten $|BC|, |CA|, |AB|$ (6). Das Kreisbüschel $B(A, B, C, |BC|, |CA|, |AB|)$ ist elliptisch bei einem spitzwinkligen, parabolisch bei einem rechtwinkligen und hyperbolisch bei einem stumpfwinkligen Dreieck.

Das klassische Apolloniosbüschel gehört – wie am Anfang dieses Abschnitts erwähnt zu den Verhältniszahlen

$$a = \frac{1}{|BC|}, \quad b = \frac{1}{|CA|}, \quad c = \frac{1}{|AB|}$$

5. Da das geometrische Mittel zweier verschiedener nicht-negativer Zahlen immer kleiner als das arithmetische Mittel, meidet die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke eines Punktes mit seinem Bildpunkt unter einer Inversion den Inversionskreis und daraus ergibt sich noch die folgende Unterscheidungsmöglichkeit für Apolloniosbüschel: Ein Apolloniosbüschel ist

- elliptisch, wenn die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der zugehörigen Apollonioskreise den Umkreis des Grunddreiecks meidet,
- parabolisch, wenn diese Gerade den Umkreis berührt, und
- hyperbolisch, wenn diese Gerade den Umkreis in zwei Punkten schneidet

Für das folgende benötigen wir noch eine Variation der hier vorgeführten Ergebnisse. Wir ordnen einem Büschel $B(A, B, C, a, b, c)$ den Punkt mit den trilinearen Koordinaten $(a^2 : b^2 : c^2)$ in Bezug auf das Dreieck ABC zu und fragen wieder nach den Bildern der Mengen der elliptischen beziehungsweise parabolischen Apolloniosbüschel.

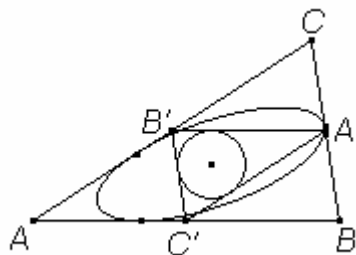
Satz 16. *Das Apolloniosbüschel $B(A, B, C, a, b, c)$ ist genau dann elliptisch, wenn der Punkt mit den trilinearen Koordinaten $(a^2 : b^2 : c^2)$ im Inneren der Ellipse*

$$E_e : 2 \cdot (|AB|^2 \cdot |BC|^2 \cdot x \cdot z + |AB|^2 \cdot |CA|^2 \cdot y \cdot z + |BC|^2 \cdot |CA|^2 \cdot x \cdot y) = \\ = |BC|^4 \cdot x^2 + |CA|^4 \cdot y^2 + |AB|^4 \cdot z^2$$

liegt. Im parabolischen Fall liegt dieser Punkt auf dem Rand der Ellipse.

Für diese Ellipse gilt:

- Die Ellipse ist dem Dreieck ABC eingeschrieben,
- die Verbindungsgeraden der Ecken mit den gegenüberliegenden Berührungspunkten schneiden sich in dem zum Inkreismittelpunkt isotom konjugierten Punkt,
- ihr Mittelpunkt ist der Mittelpunkt des Spiekerkreises (= Kantenschwerpunkt des Dreiecks (9)).



Beweis. In Analogie zu der bekannten Heronschen Flächenformel für ein Dreieck bemerken wir, dass wir die Bedingungen für die Elliptizität eines Apolloniosbüschels $B(A, B, C, a, b, c)$ in einer Ungleichung zusammenfassen können:

$$(|BC| \cdot a + |CA| \cdot b + |AB| \cdot c) \cdot (|BC| \cdot a + |CA| \cdot b - |AB| \cdot c) \cdot \\ \cdot (|BC| \cdot a - |CA| \cdot b + |AB| \cdot c) \cdot (-|BC| \cdot a + |CA| \cdot b + |AB| \cdot c) > 0.$$

Ausmultiplizieren ergibt:

$$2 \cdot (|AB|^2 \cdot |BC|^2 \cdot a^2 \cdot c^2 + |AB|^2 \cdot |CA|^2 \cdot b^2 \cdot c^2 + |BC|^2 \cdot |CA|^2 \cdot a^2 \cdot b^2) - \\ - |BC|^4 \cdot a^4 - |CA|^4 \cdot b^4 - |AB|^4 \cdot c^4 > 0.$$

Setzen wir nun $a^2 = x$, $b^2 = y$, $c^2 = z$, so erhalten wir die angegebene Bedingung.

Für $z = 0$ zerfällt die Gleichung der Ellipse E_e :

$$- (|BC|^2 \cdot x - |CA|^2 \cdot y)^2 = 0,$$

das bedeutet, dass die Ellipse die Dreiecksseite AB in dem Punkt mit den trilinearen Koordinaten $(|CA|^2, |BC|^2, 0)$ berührt. Analog findet man die Berührungspunkte der Ellipse mit den anderen Dreiecksseiten. Der Ausdruck in der Klammer gibt die Gleichung der Verbindungsgeraden der Ecke C mit dem Berührungspunkt auf der Geraden AB . Der zum Inkreismittelpunkt isotom konjugierte Punkt hat die trilinearen Koordinaten

$$\left(\frac{1}{|BC|^2}, \frac{1}{|CA|^2}, \frac{1}{|AB|^2} \right)$$

und erfüllt diese Gleichung ebenso, wie die Gleichungen der beiden anderen Verbindungsgeraden.

Der Mittelpunkt der Ellipse ist der Pol der uneigentlichen Geraden. Dazu muss man die Matrix

$$\begin{pmatrix} -|BC|^4 & |BC|^2 \cdot |CA|^2 & |BC|^2 \cdot |AB|^2 \\ |BC|^2 \cdot |CA|^2 & -|CA|^4 & |AB|^2 \cdot |CA|^2 \\ |BC|^2 \cdot |AB|^2 & |AB|^2 \cdot |CA|^2 & -|AB|^4 \end{pmatrix}$$

invertieren, was bis auf einen konstanten Faktor auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & |AB|^2 & |CA|^2 \\ |AB|^2 & 0 & |BC|^2 \\ |CA|^2 & |BC|^2 & 0 \end{pmatrix}$$

führt. Der Pol der uneigentlichen Geraden ergibt sich durch Multiplikation mit

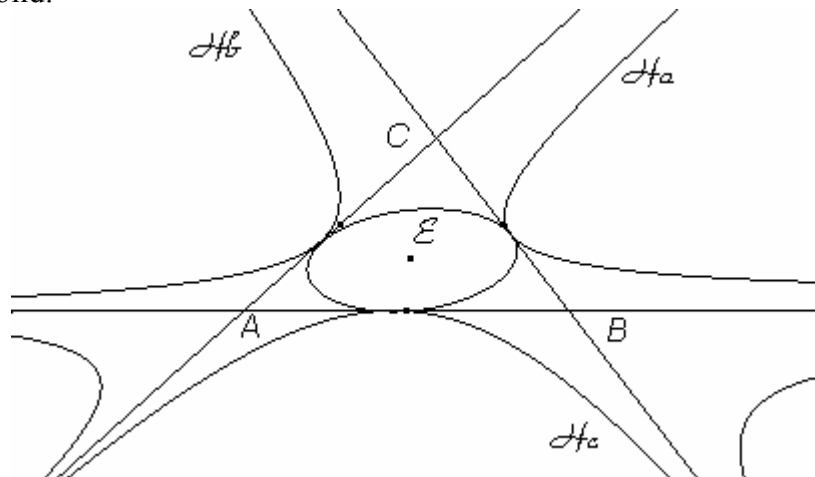
$$(|BC| \quad |CA| \quad |AB|)$$

von rechts, womit man die trilinearen Koordinaten des Mittelpunkts des Spiekerkreises erhält (5). *qed*

Bemerkung. Wie im linearen Fall (Bemerkung 3 nach Satz 15) kann man auch hier Punkte außerhalb des Dreiecks in Betracht ziehen. Man kommt auf eine entsprechende Konfiguration, wenn bei obigem Verfahren etwa c^2 durch $-z$ ersetzt. Es entsteht die Gleichung

$$2 \cdot (|BC|^2 \cdot |CA|^2 \cdot x \cdot y - |AB|^2 \cdot |BC|^2 \cdot x \cdot z - |AB|^2 \cdot |CA|^2 \cdot y \cdot z) = |BC|^4 \cdot x^2 + |CA|^4 \cdot y^2 + |AB|^4 \cdot z^2.$$

Der zugehörige Kegelschnitt schneidet die uneigentliche Gerade in zwei Punkten und berührt die Seiten des Dreiecks; es handelt sich also um eine dem Dreieck einbeschriebene Hyperbel. Diese verhält sich zu dem Ankreis, der die Dreiecksseite AB von außen berührt, genau so wie vorher die Ellipse zum Inkreis. Analog findet man zwei weitere Hyperbeln und damit das folgende Gesamtbild:



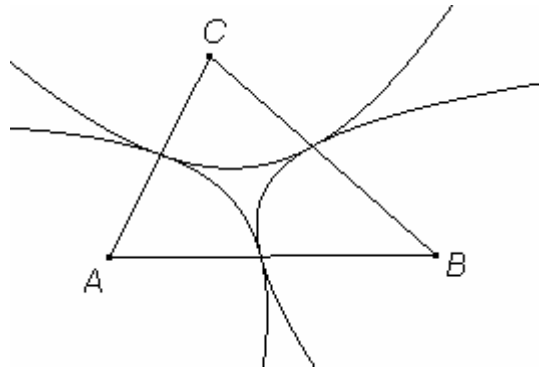
Der vorstehende Satz 16 erlaubt noch eine Variation in der umgekehrten Richtung. Haben wir die Ecken des Bereichs aus Satz 13 im Satz abgerundet, so wollen wir sie im Folgenden zu-

spitzen. Dazu benötigen wir aber eine kleine Vorbereitung. Wir betrachten die drei Hyperbeln H_a , H_b , H_c mit den Ankreismittelpunkten des Dreiecks ABC als Mittelpunkten, in Bezug auf die das Dreieck selbstpolar ist. Sie sind in trilinearen Koordinaten gegeben durch die Gleichungen

$$H_a: -|BC| \cdot x^2 + |CA| \cdot y^2 + |AB| \cdot z^2 = 0,$$

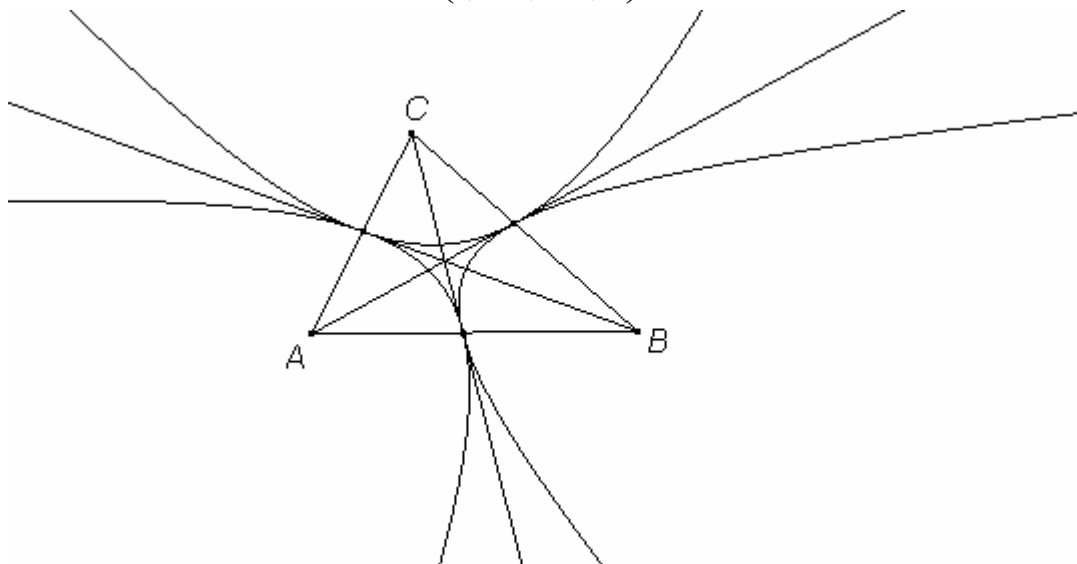
$$H_b: |BC| \cdot x^2 - |CA| \cdot y^2 + |AB| \cdot z^2 = 0,$$

$$H_c: |BC| \cdot x^2 + |CA| \cdot y^2 - |AB| \cdot z^2 = 0.$$



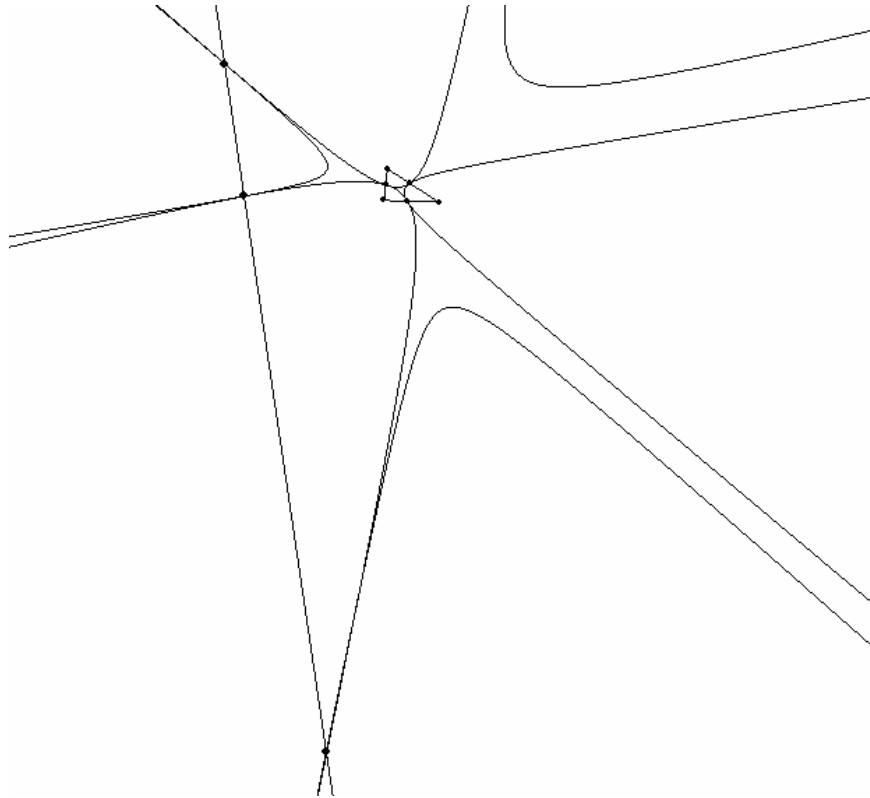
Diese Hyperbeln berühren sich paarweise zweimal, je einmal in Punkten, die im Inneren der Dreiecksseiten liegen, und dann jeweils im vierten harmonischen Punkt. Die gemeinsamen Tangenten gehen durch die Ecken des Dreiecks. Die zu den Berührungspunkten im Inneren der Dreiecksseiten gehörenden gemeinsamen Tangenten schneiden sich in dem Punkt mit den trilinearen Koordinaten¹³

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{c}} \right);$$



dessen trilineare Polare ist die Verbindungsgerade der drei anderen Berührungspunkte:

¹³ Punkt $X(366)$ in der im Internet zu findenden *Encyclopedia of Triangle Centers*.



Für das Folgende sei noch daran erinnert, dass eine Hyperbel die Ebene in drei Gebiete – zwei konvexe und einen konkaven – zerlegt.

Nun ordnen wir einem Apolloniosbüschel $B(A, B, C, a, b, c)$ den Punkt mit den trilinearen Koordinaten $(\sqrt{a} : \sqrt{b} : \sqrt{c})$ in Bezug auf das Dreieck ABC zu und erhalten den folgenden Satz.

Satz 17. *Das Apolloniosbüschel $B(A, B, C, a^2, b^2, c^2)$ ist genau dann elliptisch, wenn der Punkt mit den trilinearen Koordinaten $(|a| : |b| : |c|)$ im Innern des von den drei Hyperbeln H_a, H_b, H_c im Dreieck ABC gebildeten krummlinigen Dreiecks liegt, das heißt, wenn der Punkt mit den trilinearen Koordinaten $(a : b : c)$ im Durchschnitt der von den drei Hyperbeln gebildeten konkaven Gebiete liegt. Im parabolischen Fall liegt dieser Punkt auf einer dieser Hyperbeln.*

Beweis. Die linken Seiten der angegebenen Gleichungen für die Hyperbeln werden genau dann positiv, wenn man für die Unbestimmten die trilinearen Koordinaten eines Punktes aus den jeweiligen konkaven Gebiete einsetzt. *qed*

Bemerkung. Ist das Dreieck ABC gleichseitig, so sind die Parallelen zu den Seiten durch die gegenüberliegenden Ecken die Asymptoten an die Hyperbeln H_a, H_b, H_c .

4. Eine Analogie im dreidimensionalen Raum

Zum Schluss sei noch ein Blick in den dreidimensionalen euklidischen Raum geworfen. Da findet man das folgende Analogon zu den bisherigen Betrachtungen:

Satz 18 (Tetraeder und sechs Apollonioskugeln): *Es seien $ABCD$ ein Tetraeder und a, b, c, d vier positive, paarweise verschiedene Zahlen. Dann gehören die Apollonioskugeln*

$$K_{AB} = \{P; |AP| : |BP| = a : b\}, K_{CD} = \{P; |CP| : |DP| = c : d\},$$

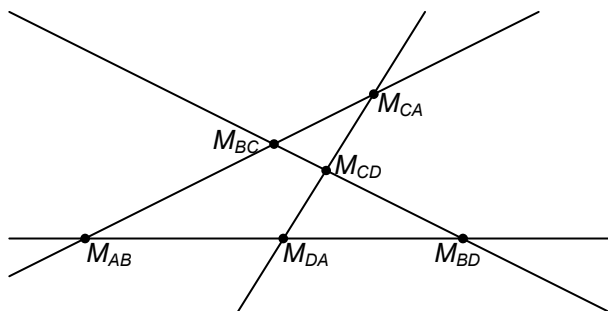
$$K_{AC} = \{P; |AP| : |CP| = a : c\}, K_{BD} = \{P; |BP| : |DP| = b : d\},$$

$$K_{AD} = \{P; |AP| : |DP| = a : d\}, K_{BC} = \{P; |BP| : |CP| = b : c\},$$

zu einem Kugelbündel¹⁴, dessen Achse durch den Umkugelmittelpunkt des Tetraeders geht.

Beweis. Betrachtet werden zuerst die der Ecke D gegenüberliegende Tetraederseite ABC und die drei Apollonioskugeln K_{AB} , K_{BC} und K_{CA} . Sie schneiden die Ebene ABC in drei Apollonioskreisen $k(A,B,a,b)$, $k(B,C,b,c)$, $k(C,A,c,a)$, die zu einem Kreisbüschel gehören (Satz 5). Dessen Achse \mathcal{O}_D läuft durch den Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC . Die Mittelpunkte M_{AB} , M_{BC} und M_{CA} dieser Kugeln liegen auf den Geraden AB , BC beziehungsweise CA . Damit sind die genannten Apollonioskreise Großkreise dieser Kugeln und haben dieselben Mittelpunkte, die auf einer zu \mathcal{O}_D senkrechten Geraden m_D liegen. Die Lotebene E_D zu der Geraden m_D , die die Gerade \mathcal{O}_D enthält, steht senkrecht auf der Ebene ABC und ist aufgrund des Satzes von Pythagoras der geometrische Ort aller Punkte, die in Bezug auf die Kugeln K_{AB} , K_{BC} und K_{CA} die gleiche Potenz haben. Da sie den Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC enthält, liegt auch der Mittelpunkt der Umkugel des Tetraeders in dieser Ebene.

Die anderen Tetraederseiten liefern entsprechende Geraden \mathcal{O}_A , \mathcal{O}_B , \mathcal{O}_C beziehungsweise m_A , m_B , m_C sowie Ebenen E_A , E_B , E_C . Die vier Ebenen E_A , E_B , E_C , E_D haben den Mittelpunkt der Umkugel des Tetraeders gemeinsam; er hat gleiche Potenz p in Bezug auf alle sechs Apollonioskugeln. Die Geraden m_A , m_B , m_C und m_D sind paarweise verschieden, schneiden sich aber paarweise und liegen – wie die folgende Figur zeigt – in einer Ebene:



¹⁴ bundle of coaxial spheres im Sinn von (8, Seite 111).

Diese Ebene sei mit E bezeichnet. Sie ist senkrecht zu allen Ebenen E_A, E_B, E_C, E_D . Da diese Ebenen den Umkugelmittelpunkt gemeinsam haben, schneiden sie sich in dem vom Umkugelmittelpunkt auf die Ebene E gefällten Lot, dem geometrischen Ort aller Punkte, die in Bezug auf die sechs Apollonioskugeln gleiche Potenz haben. Zum Nachweis der Bündel-eigenschaft nehmen wir an, dass der Umkugelmittelpunkt mit dem Ursprung zusammenfällt; es ist zu zeigen, dass sich alle sechs Potenzfunktionen

$$\begin{aligned} P_{AB}(X) &= (X - M_{AB})^2 - r_{AB}^2 = X^2 - 2 M_{AB} X + M_{AB}^2 - r_{AB}^2 = X^2 - 2 M_{AB} X + p, \\ P_{BC}(X) &= X^2 - 2 M_{BC} X + p, P_{CA}(X) = X^2 - 2 M_{CA} X + p, \\ P_{AD}(X) &= X^2 - 2 M_{AD} X + p, P_{BD}(X) = X^2 - 2 M_{BD} X + p, P_{CD}(X) = X^2 - 2 M_{CD} X + p \end{aligned}$$

als affine Kombinationen aus dreien unter ihnen darstellen lassen. Die Mittelpunkte M_{AD}, M_{BD} und M_{CD} liegen nicht auf einer Geraden, sind also affin unabhängig; ihre affine Hülle ist die Ebene E . Wir zeigen, dass die Potenzfunktion P_{AB} sich als Linearkombination der Potenzfunktionen P_{AD}, P_{BD} und P_{CD} darstellen lässt; für die Potenzfunktionen P_{BC} und P_{CA} ergibt sich die Behauptung dann analog. Da der Punkt M_{AB} in der von den Punkten M_{AD}, M_{BD} und M_{CD} erzeugten Ebene, also in der affinen Hülle der Punkte M_{AD}, M_{BD} und M_{CD} liegt, lässt sich der Punkt M_{AB} als affine Kombination der Punkte M_{AD}, M_{BD} und M_{CD} darstellen:

$$M_{AB} = \lambda M_{AD} + \mu M_{BD} + \nu M_{CD}, \quad \lambda + \mu + \nu = 1.$$

Dann folgt aber unmittelbar

$$P_{AB} = \lambda P_{AD} + \mu P_{BD} + \nu P_{CD}, \quad \lambda + \mu + \nu = 1,$$

und das ist die Behauptung. *qed*

Die vorstehende Betrachtung zeigt, dass auch im räumlichen Fall keiner, einer oder zwei Apolloniospunkte, das heißt Punkte, die allen sechs Kugeln angehören, existieren. Ist das Apolloniosbüschel $B(A,B,C,a,b,c)$ elliptisch, so schneiden sich die Apollonioskugeln K_{AB}, K_{BC} , und K_{CA} in einem Kreis in einer zur m_D senkrechten Ebene. Ist dann auch das Apolloniosbüschel $B(A,B,C,a,b,c)$ elliptisch, so schneiden sich die Apollonioskugeln K_{AB}, K_{BC} , und K_{CA} ebenfalls in einem Kreis in einer zur m_C senkrechten Ebene. Da diese beiden Kreise in verschiedenen Ebenen liegen haben sie höchstens zwei Punkte gemeinsam. Also gibt es in diesem Fall höchstens zwei Apolloniospunkte; ist eines der beiden genannten Apolloniosbüschel nicht elliptisch, so gibt höchstens einen Apolloniospunkt. Wenn es genau einen Apolloniospunkt gibt, so muss dieser in der Ebene E liegen, andernfalls wäre der Bildpunkt bei der Spiegelung an der Ebene E , die die Apollonioskugeln in sich selbst abbildet, ein zweiter Apolloniospunkt.

Dementsprechend unterscheiden wir in der räumlichen Situation wieder elliptische, parabolische und hyperbolische Apolloniosbündel. Wie im ebenen Fall ergibt sich, dass

- die beiden Apolloniospunkte eines elliptischen Apolloniosbündels bei der Spiegelung an der Umkugel des Grundtetraeders miteinander vertauscht werden,

- der Apolloniospunkt eines parabolischen Apolloniosbündels auf der Umkugel liegt,
- die Ebene E die Umkugel meidet, berührt oder schneidet, falls das Apolloniosbündel elliptisch, parabolisch beziehungsweise hyperbolisch ist.

Nun stellt sich die Frage nach einem räumlichen Analogon der Sätze 13 bis 16. Dazu benötigen wir die dreidimensionale Fassung des Satzes von Ptolemaios:

Fünf Punkte A_0, A_1, \dots, A_4 im dreidimensionalen euklidischen Raum mit den Abständen $a_{ij} = d(A_i, A_j)$, $0 \leq i < j \leq 4$, liegen genau dann auf einer Kugel, wenn die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{01}^2 & \cdots & a_{04}^2 \\ a_{01}^2 & 0 & \cdots & a_{14}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{04}^2 & a_{14}^2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

verschwindet. (2, Proposition 9.7.3.7)

Für beliebige fünf Punkte im Raum ist die Determinante nicht negativ (folgt aus dem Beweis in (2)).

Die analoge Bedingung für die Ebene liefert ein in Linearfaktoren zerfallendes Polynom und damit die Sätze 13 bis 15. Im Raum zerfällt dieses Polynom jedoch nicht, statt es eines Produktes von Linearfaktoren werden wir auf eine nicht leicht zu beschreibende Fläche 4. Ordnung geführt. Aber eine Analogie zu Satz 16 lässt sich leicht formulieren und begründen.

Satz 19. *Das Apolloniosbündel $B(A_0, A_1, A_2, A_3, a_0, a_1, a_2, a_3)$ ist genau dann elliptisch, wenn die Determinante der Matrix*

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{01}^2 & \cdots & a_0^2 \\ a_{01}^2 & 0 & \cdots & a_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^2 & a_1^2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

negativ ist, das heißt, wenn der Punkt mit den trilinearen Koordinaten $(a_0^2 : a_1^2 : a_2^2 : a_3^2)$ im Inneren des Ellipsoids

$$\begin{aligned} \text{Ed} : & a_{12}^2 \cdot a_{13}^2 \cdot a_{23}^2 \cdot w^2 + a_{02}^2 \cdot a_{03}^2 \cdot a_{23}^2 \cdot x^2 + a_{01}^2 \cdot a_{03}^2 \cdot a_{13}^2 \cdot y^2 + a_{01}^2 \cdot a_{02}^2 \cdot a_{12}^2 \cdot z^2 - \\ & - (a_{02}^2 \cdot a_{13}^2 \cdot a_{23}^2 + a_{03}^2 \cdot a_{12}^2 \cdot a_{23}^2 - a_{01}^2 \cdot a_{23}^4) \cdot w \cdot x - \\ & - (a_{01}^2 \cdot a_{13}^2 \cdot a_{23}^2 + a_{03}^2 \cdot a_{12}^2 \cdot a_{13}^2 - a_{02}^2 \cdot a_{13}^4) \cdot w \cdot y - \\ & - (a_{01}^2 \cdot a_{12}^2 \cdot a_{23}^2 + a_{02}^2 \cdot a_{12}^2 \cdot a_{13}^2 - a_{03}^2 \cdot a_{12}^4) \cdot w \cdot z - \\ & - (a_{01}^2 \cdot a_{03}^2 \cdot a_{23}^2 + a_{02}^2 \cdot a_{03}^2 \cdot a_{13}^2 - a_{12}^2 \cdot a_{03}^4) \cdot x \cdot y - \\ & - (a_{01}^2 \cdot a_{02}^2 \cdot a_{23}^2 + a_{02}^2 \cdot a_{03}^2 \cdot a_{12}^2 - a_{13}^2 \cdot a_{02}^4) \cdot x \cdot z - \\ & - (a_{01}^2 \cdot a_{02}^2 \cdot a_{13}^2 + a_{01}^2 \cdot a_{03}^2 \cdot a_{12}^2 - a_{23}^2 \cdot a_{01}^4) \cdot y \cdot z = 0 \end{aligned}$$

liegt. Im parabolischen Fall liegt dieser Punkt auf dem Rand des Ellipsoids.

Für dieses Ellipsoid gilt:

- Das Ellipsoid ist dem Tetraeder $A_0A_1A_2A_3$ einbeschrieben,
- die Verbindungsgeraden der Ecken mit den Berührungspunkten auf den gegenüberliegenden Seiten sind genau dann kopunktal, wenn das Tetraeder $A_0A_1A_2A_3$ isodynamisch ist¹⁵,
- sein Mittelpunkt hat die trilinearen Koordinaten

$$(F_1 \cdot a_{01}^2 + F_2 \cdot a_{02}^2 + F_3 \cdot a_{03}^2 : F_0 \cdot a_{01}^2 + F_2 \cdot a_{12}^2 + F_3 \cdot a_{13}^2 : \\ : F_0 \cdot a_{02}^2 + F_1 \cdot a_{12}^2 + F_3 \cdot a_{23}^2 : F_0 \cdot a_{03}^2 + F_1 \cdot a_{13}^2 + F_2 \cdot a_{23}^2)$$

Wir verzichten auf einen expliziten Beweis, da sich diese Aussagen mit Hilfe eines Computeralgebrasystems unmittelbar verifizieren lassen.

Schlussbemerkungen. Es ist klar, dass man Satz 17 und manches weitere auch auf die n -dimensionale Euklidische Geometrie verallgemeinern kann.

Offen bleibt für uns die geometrische Bedeutung der Ellipse E_e und des Ellipsoids E_d sowie der entsprechenden höher-dimensionalen Analoga. Wir bitten Leser um Hinweise.

Dank an Martin Härting für sorgfältiges Lesen des Manuskripts und überaus sachdienliche kritische Anmerkungen sowie an Chris Fisher für den Hinweis auf den n -dimensionalen Ptolemäischen Satz.

LITERATUR

1. Aristoteles: Meteorologie – Über die Welt, Strohm H, Übers. (Aristoteles Werke in deutscher Übersetzung, Band 12). Berlin: Akademie-Verlag 1970.
2. Berger M: Geometry I. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer-Verlag 1987.
3. Bos W: Vektorielle Behandlung von Kreisbüscheln und Kreisbündeln. Didakt. Math. 1974; 2: 63-80.
4. Coxeter HSM, Greitzer SL: Zeitlose Geometrie, Stuttgart: Klett-Verlag 1983.
5. Diercke C: Weltatlas, Braunschweig – Berlin – Hamburg – Kiel: Georg Westermann Verlag ⁸³1948, zugelassen zum Gebrauch an Schulen durch: Control Commission for Germany (B.E.) Intr. / 63 009 / 18 / ED / TB / Z / vom 18. 5. 1948, Office of Military Government for Germany (US) Educations Branch vom 30. 9. 1948
6. Eddy RH, Fritsch R: The conics of Ludwig Kiepert – A comprehensive lesson in the geometry of the triangle. Math. Mag. 1994; 67: 188-205.

¹⁵ Ein Tetraeder ist *isodynamisch*, wenn die Produkte der Längen der drei Paare von Gegenseiten einander gleich sind: $a_{01} \cdot a_{23} = a_{02} \cdot a_{13} = a_{03} \cdot a_{12}$.

7. Euklid: Die Elemente, Buch I-XIII. Thaer C, Hg., Übers., Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1969.
8. Fritsch R: An n -dimensional Bodenmiller Theorem. Crux Math. 1995; 21: 109-113.
9. Johnson RA: Advanced Euclidean Geometry – An Elementary Treatise of the Geometry of the Triangle and the Circle. New York: Dover Publications 1960.
10. Koman M: Jak jsem pomocí Cabri objevil novou větu o trojúhelníku a Apolloniových kružnicích. In: Ausbergerová M, Novotná J, Sýkora V, Hg.: 8. setkání učitelů matematiky všech typů škol Prachatice 2002, Prag: Jednota českých matematiků a fyziků 2002; 165-179.
11. Koman M: Zwei Sätze, einer aus der Dreiecks- und der zweite aus der Tetraedergeometrie, die durch Cabri-Geometrie entdeckt wurden. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2003 – Vorträge auf der 37. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 3. bis 7. 3. 2003 in Dortmund. Hildesheim – Berlin: Verlag Franzbecker 2003; 357-360.
12. Koman M, Fritsch R: Posviťme si s Cabri do méně známých a neznámých zákoutí geometrie, Část I (Co víte a co nevíte o Apolloniově kružnici). Matematika – Fyzika – Informatika. Casopis pro výuku na základních a středních školách 2003/2004; 13: 513-525
13. Koman M, Fritsch R: Posviťme si s Cabri do méně známých a neznámých zákoutí geometrie, Část II (Co trojúhelníki a třech Apolloniových kružnicích). Matematika – Fyzika – Informatika. Časopis pro výuku na základních a středních školách 2004/2005; 14: 65-77
14. tom Dieck T: Topologie. Berlin, New York: Walter de Gruyter 1991.

Internetseiten:

<http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Apollonius.html>

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Aristotle.html>

<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Brocard.html>

<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Lemoine.html>

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Menelaus.html>

<http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Ptolemy.html>

<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/>

Rudolf Fritsch

Mathematisches Institut

Ludwig-Maximilians-Universität München

Theresienstraße 39

D-80333 München

fritsch@mathematik.uni-muenchen.de milan.koman@pedf.cuni.cz

Milan Koman

Pädagogische Fakultät

Karls-Universität Prag

M. D. Rettigové 4

CZ-116 39 Prag 1