LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN | MATHEMATISCHES INSTITUT

Christopher Frei
Olivier Haution

Sommersemester 2016
15. Juli 2016

Lineare Algebra II

Klausur

Nachname: ____________ Vorname: ____________

Matrikelnr.: ____________ Fachsemester: ____________

Abschluss: Bachelor, PO ❏ 2007 ❏ 2010 ❏ 2011 ❏ 2015

Master, PO ❏ 2010 ❏ 2011 ❏ 2015

Lehramt Gymnasium: ❏ modularisiert ❏ nicht modularisiert

❏ Diplom ❏ Anderes: ____________

Hauptfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ______

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ______

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Lichtbild- und Studienausweis sichtbar auf den Tisch.
Bitte überprüfen Sie, ob Sie **fünf Aufgaben** erhalten haben.
Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**.
Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe.
Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Durch Angabe eines Pseudonyms links unten (z.B. die letzten vier Ziffern Ihrer Matrikelnummer) stimmen Sie der Veröffentlichung von Klausurergebnis und Pseudonym im Internet zu.

Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

Pseudonym	1	2	3	4	5	$\sum$
	/6	/6	/7	/7	/6	/32

Name: ____________________

Aufgabe 1. [6 Punkte]

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist. **Eine Begründung ist nicht notwendig**.

(a) Sei V ein n-dimensionaler Euklidischer Raum. Dann ist das innere Produkt auf V als Bilinearform äquivalent zum Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

❏ wahr ❏ falsch [1 Punkt]

(b) Sei $n = p^2$ für eine Primzahl p. Dann ist jede abelsche Gruppe mit n Elementen isomorph zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

❏ wahr ❏ falsch [1 Punkt]

(c) Jede Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$ ist entweder positiv definit, oder negativ definit, oder degeneriert.

❏ wahr ❏ falsch [1 Punkt]

(d) Jedes Ideal im Ring $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ist ein Hauptideal.

❏ wahr ❏ falsch [1 Punkt]

(e) Sei p eine Primzahl. Dann ist jeder $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$-Modul torsionsfrei.

❏ wahr ❏ falsch [1 Punkt]

(f) Der $\mathbb{Z}$-Modul $\langle (0,2), (3,0), (1,1) \rangle \subset \mathbb{Z}^2$ ist nicht frei.

❏ wahr ❏ falsch [1 Punkt]

Name: ____________________

Aufgabe 2. [6 Punkte]

Gegeben sei ein 3-dimensionaler Euklidischer Raum V mit Orthonormalbasis $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, und ein Endomorphismus $L : V \to V$, mit

$$[L]_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V, die aus Eigenvektoren von L besteht.

Name: ______________________________

Aufgabe 3. [7 Punkte]

Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Raum und $L : V \to V$ ein Endomorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $L \circ L^*$ hat. [2 Punkte]

(b) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von $L \circ L^*$ nicht-negative reelle Zahlen sind. [2 Punkte]

(c) Sei L selbstadjungiert und alle Eigenwerte von L seien nicht-negative reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass es dann einen Endomorphismus $L_1 : V \to V$ gibt, sodass $L = L_1 \circ L_1^*$. [3 Punkte]

Name: ____________________

Aufgabe 4. [7 Punkte]

Auf $\mathbb{R}^3$ sei die quadratische Form

$$Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + y^2 - 6xz - 4yz + 9z^2$$

gegeben.

(a) Sei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie $[\beta_Q]_E$. [1 Punkt]

(b) Ist Q nichtdegeneriert? (**mit Begründung**) [2 Punkte]

(c) Definiert β_Q ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^3$? (**mit Begründung**) [2 Punkte]

(d) Zu welchen der folgenden quadratischen Formen auf $\mathbb{R}^3$ ist Q äquivalent? (**mit Begründung**)

$$\begin{aligned} Q_1(x, y, z) &= x^2 - y^2 - z^2 \\ Q_2(x, y, z) &= x^2 - y^2 + 2z^2 \\ Q_3(x, y, z) &= x^2 - y^2 \\ Q_4(x, y, z) &= x^2 + y^2 - z^2 \end{aligned}$$

[2 Punkte]

Name: ______________________________

Aufgabe 5. [6 Punkte]

(a) Definieren Sie folgende Begriffe:

(i) Maximales Ideal [1 Punkt]

(ii) Euklidischer Ring [1 Punkt]

(b) Zeigen Sie: Seien R-Moduln M_1, M_2 und Untermoduln $N_1 \subset M_1$, $N_2 \subset M_2$ gegeben. Dann ist $N_1 \times N_2$ ein Untermodul von $M_1 \times M_2$, und

$$(M_1 \times M_2)/(N_1 \times N_2) \cong M_1/N_1 \times M_2/N_2.$$

[2 Punkte]

(c) Bestimmen Sie die invarianten Faktoren und Elementarteiler der abelschen Gruppe

$$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

[2 Punkte]

Name: ____________________

Name: ______________________________

Name: ______________________________