Aufgabe 1. Sei $\varphi\colon R \to S$ ein bijektiver Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass φ^{-1} ein Ringhomomorphismus ist.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring mit Eins. Ein Element $x \in R$ heißt *nilpotent*, falls $x^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ein element $u \in R$ heißt *invertierbar*, falls es $v \in R$ mit $uv = vu = 1$ existiert.

(i) Zeigen Sie : x ist nilpotent $\Rightarrow 1 - x$ ist invertierbar.

(ii) Sei R kommutativ, und sei N die Menge aller nilpontenten Elemente von R. Zeigen Sie, dass N ein Ideal von R ist.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring. Das *Zentrum von* R ist die Menge

$$\mathcal{Z}(R) = \{x \in R | \forall y \in R, xy = yx\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{Z}(R)$ ein Unterring von S ist.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper und R der Ring $M(n, n, K)$.

(i) Für jede $1 \leq i, j \leq n$ sei $E_{ij} \in M(n, n, K)$ die Matrix, die nur im (i, j)-ten Eintrag eine 1 hat, ansonsten Nullen, d.h.

$$(E_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = k \text{ und } k = l \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie das Produkt $E_{ij}E_{kl}$.

(ii) Bestimmen Sie das Zentrum $\mathcal{Z}(R)$ (Hinweis: für $M \in R$ berechnen Sie ME_{ij} und $E_{ij}M$).

(iii) Bestimmen Sie die Menge aller Ideale von R (Hinweis: für $M \in R$ berechnen Sie $E_{ij}ME_{ki}$).