Aufgabe 1. Sei $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Bilinearform deren Strukturmatrix bezüglich der Standardbasis

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Finden Sie die Signatur von b.

Aufgabe 2. Seien $A, B \in M(3,3,\mathbb{R})$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sei $a\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung deren Matrix bezüglich der Standardbasis A ist, und $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Bilinearform deren Strukturmatrix bezüglich der Standardbasis B ist.

(i) Zeigen Sie, dass b ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass a bezüglich des Skalarproduktes b selbstadjungiert ist.

(iii) Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich b bestehend aus Eigenvektoren von a.

Aufgabe 3. Sei $V = M(2,2,\mathbb{R})$, und $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ die symmetrische Bilinearform $(A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(AB)$. Seien

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Was ist die Matrix von b bezüglich der Basis $\{E_{i,j} | 1 \leq i, j \leq 2\}$?

(ii) Finden Sie die Signatur von b.

(iii) Finden Sie eine Orthogonalbasis von V bezüglich der Bilinearform b.

(iv) Sei $U = \ker(\mathrm{Spur}\colon V \to \mathbb{R})$. Finden Sie die Signatur von $b|_{U \times U}$.