In allen Augaben ist K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$.

Aufgabe 1. Sei p, q die durch

$$q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2, \qquad p(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

definierte quadratische Formen auf K^3. Sind p und q äquivalent falls

(i) $K = \mathbb{R}$?

(ii) $K = \mathbb{Q}$?

(iii) $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$?

Aufgabe 2. Seien $p, q\colon V \to K$ nicht-degenerierte quadratische Formen.

(i) Sei $\dim V = 2$. Zeigen Sie: Die Formen p und q sind genau dann äquivalent, wenn $\operatorname{discr}(p) = \operatorname{discr}(q)$ und $p(V - \{0\}) \cap q(V - \{0\}) \neq \varnothing$ gelten.

(ii) Sei $\dim V = 3$, und p, q beide isotrop. Zeigen Sie: Die Formen p und q sind genau dann äquivalent, wenn $\operatorname{discr}(p) = \operatorname{discr}(q)$ gilt. (Hinweis: Benutzen Sie Tutoriumsblatt 6, Aufgabe 2 (ii)).

Aufgabe 3. Sei $q\colon V \to K$ eine nicht-degenerierte quadratische Form mit $\dim V < \infty$.

(i) Sei $W \subset V$ einen K-Unterverktorraum mit $q|_W = 0$. Zeigen Sie, dass $2 \cdot \dim W \leq \dim V$ gilt.

(ii) Sei $K = \mathbb{C}$. Zeigen Sie: ein K-Unterverktorraum $W \subset V$ mit $q|_W = 0$ und $2 \cdot \dim W \in \{\dim V, \dim V - 1\}$ existiert.

(iii) Gilt (ii) noch falls $K = \mathbb{R}$?

Aufgabe 4. Sei q eine nicht-degenerierte quadratische Form auf K^n, und $a \in K - \{0\}$. Zeigen Sie, dass folgende Aussage äquivalent sind:

(a) Es gibt eine quadratische Form p auf K^{n-1} sodass die quadratische Form

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto p(x_1, \ldots, x_{n-1}) + a(x_n)^2$$

auf K^n zu q äquivalent ist.

(b) $a \in q(K^n)$.