Aufgabe 1. Finden Sie $C, D \in M(n, n, \mathbb{Q})$ mit D diagonal und C invertierbar, sodass $D = CA(C^t)$ gilt, falls

(i)
$$n = 3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii)
$$n = 2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(iii)
$$n = 3, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und V ein K-Vektorraum. Sei $b\colon V \times V \to K$ eine nichtdegenerierte symmetrische Bilinearform. Wir nehmen an, dass $x \in V - \{0\}$ mit $b(x, x) = 0$ existiert. Sei

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2, 2, K).$$

(i) Zeigen Sie : falls $\dim_K V = 2$ gilt, dann existiert eine Basis E von V mit $[b]_E = H$.

(ii) Zeigen Sie, dass es einen zweidimensionalen Unterraum $U \subset V$ existiert, sodass es gilt:

- Die Strukturmatrix von $b|_{U \times U}$ bezüglich einer geigeneten Basis ist H.
- $b|_{U^\perp \times U^\perp}$ ist nichtdegeneriert.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und $b\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform.

(i) Seien U, R Unterverktorräume von V sodass es gilt:

(a) $R \perp U$ (ie. $b(r, u) = 0$ für alle $r \in R$ und $u \in U$).
(b) $V = U \oplus R$.
(c) $b|_{R \times R} = 0$.
(d) $b|_{U \times U}$ ist nichtdegeneriert.

Zeigen Sie, dass $R = V^\perp$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Unterverktorräume U, R existieren (sodass (a),(b),(c),(d) gelten).

(iii) Ist U eindeutig bestimmt? bis auf Isomorphie?