Aufgabe 1. Sei $M \in M(n,n,\mathbb{C})$ eine normale Matrix. Sei $\mathcal{V}$ die Menge der Eigenwerte von A. Zeigen Sie:

(i) M ist hermitsch $\Leftrightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}$.

(ii) M ist unitär $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathcal{V}, |\lambda| = 1$.

Aufgabe 2. (i) Sei

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M(n,n,\mathbb{R}),$$

i.e. die Koeffizienten von S sind:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = i+1 \mod n \\ 0 & \text{falls } j \neq i+1 \mod n. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass S othogonal ist.

(ii) Seien $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, und

$$T = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_n & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \dots & c_1 \end{pmatrix} \in M(n,n,\mathbb{R}),$$

i.e. die Koeffizienten von C sind

$$t_{ij} = \begin{cases} c_{j-i+1} & \text{falls } i \geq j \\ c_{j-i+1+n} & \text{falls } i < j. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass T normal ist. (Hinweis: T ist eine Linearkombination von orthogonalen Endomorphismen.)

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, und $\mathrm{Bil}(V)$ der Vektorraum der Bilinearformen $V \times V \to K$.

(i) Für $b \in \mathrm{Bil}(V)$ und $u \in V$ betrachten wir die Abbildung

$$\varphi_b(u) \colon V \to K, \quad v \mapsto b(u,v).$$

Sei V^* der Dualraum von V und $\mathrm{Hom}_K(V, V^*)$ der K-Vektorraum der Linearabbildungen $V \to V^*$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathrm{Bil}(V) \to \mathrm{Hom}_K(V, V^*), \quad b \mapsto \varphi_b$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräume ist.

(ii) Für $\alpha, \beta \in V^*$ definiert man eine Bilinearform

$$(\alpha|\beta)\colon V \times V \to K, \quad (u,v) \mapsto \alpha(u)\beta(v).$$

Zeigen Sie, dass folgende Aussage äquivalent sind.

(a) Die Bilinearform $(\alpha|\beta)$ ist symmetrisch.

(b) $\ker \alpha \subset \ker \beta$ oder $\ker \beta \subset \ker \alpha$.

(c) Die Formen α und β sind kollinear (als Vektoren in V^*).

(iii) Sei $\{\alpha_i, i = 1, \ldots, n\} \subset V$ eine linear unabhängige Familie. Zeigen Sie, dass die Familie $\{(\alpha_i|\alpha_j), i, j = 1, \ldots, n\} \subset \mathrm{Bil}(V)$ linear unabhängig ist.

(iv) Wir nehmen an, dass V endlich-dimensional ist. Zeigen Sie, dass jede Bilinearform auf V eine linearkombination for Bilinearformen $(\alpha|\beta)$ mit $\alpha, \beta \in V^*$ ist.