Aufgabe 1. Schreiben Sie das Polynom

$$x^2 + xy - y^2 + 2xz + yz$$

als $\mathbb{R}$-linearkombination von Quadraten (von Polynomen in den Variablen x, y, z).

Aufgabe 2. Sei

$$L = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{6} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{6} & 1 \end{pmatrix} \in M(3, 3, \mathbb{R}).$$

(i) Zeigen Sie, dass L orthogonal ist.

(ii) Ist L eine Drehung oder eine Drehspiegelung?

(iii) Bestimmen Sie den Winkel und die Achse.

Aufgabe 3. Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Raum. Für jeden Vektor $v \in V - \{0\}$ definiert man eine Abbildung

$$\sigma_v : V \to V; \quad \forall u \in V, \quad \sigma_v(u) = u - \frac{2}{\|v\|^2}\langle u, v\rangle v.$$

Also ist σ_v die orthogonale Spiegelung an der Hyperebene $\{v\}^\perp$. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass solche Abbildungen die orthogonale Gruppe von V erzeugen.

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung σ_v orthogonal (ie. unitär) ist. Schreiben Sie $(\sigma_v)^{-1}$ als Polynom in σ_v.

(ii) Sei $f : V \to V$ eine orthogonale (ie. unitäre) Abbildung mit $f \neq -\mathrm{id}_V$. Sei $u \in V$ mit $w = u + f(u) \neq 0$, und $g = \sigma_w \circ \sigma_u$. Berechnen Sie $g(u)$.

(iii) Sei $h = g^{-1} \circ f$. Zeigen Sie, dass h einen Fixpunkt x besitzt (dh. $h(x) = x$).

(iv) Sie $U = \{x\}^\perp$. Zeigen Sie : $h(U) \subset U$ und $h|_U : U \to U$ ist orthogonal (ie. unitär).

(v) Falls $f = -\mathrm{id}_V$, zeigen Sie dass für jede $v \in V - \{0\}$ die Abbildung $(\sigma_v)^{-1} \circ f$ einen Fixpunkt besitzt.

(vi) Zeigen Sie, dass jede othogonale (ie. unitäre) Abbildung $V \to V$ eine Verknüpfung von Abbildungen σ_v. (Hinweis : durch vollständige Induktion nach $\dim V$.)