Aufgabe 1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(2, 2, \mathbb{R}).$$

Warum existiert es eine invertierbare Matrix $P \in M(2, 2, \mathbb{R})$, sodass $P^t \cdot A \cdot P$ diagonal ist? Finden Sie eine solche Matrix P.

Aufgabe 2. Sie V ein euklidischer Vektorraum, und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, sodass es gilt:

$$\forall x \in V, \quad \langle \varphi(x), x \rangle = 0.$$

Sei φ^* die zu φ adjungierte Abbildung.

(i) Zeigen Sie : $\varphi^* = -\varphi$. (Hinweis: für $x, y \in V$ berechnen Sie $\langle \varphi(x+y), x+y \rangle$.)

(ii) Was sind die mögliche Eigenwerte von φ?

(iii) Gibt es eine solche Abbildung $\varphi \neq 0$? Gibt es ein Beispiel mit φ diagonalisierbar (und $\neq 0$)?

(iv) Wir nehmen an, dass φ injektiv ist. Zeigen Sie, dass $\dim V$ gerade ist.

(v) Sei nun W ein unitärer Vektorraum und $\psi\colon W \to W$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, sodass es gilt:
$$\forall x \in V, \quad \langle \psi(x), x \rangle = 0.$$
Zeigen Sie, dass ψ die Nullabbildung ist. (Hinweis: Für $x, y \in V$, berechnen Sie $\langle \psi(x + iy), x + iy \rangle$ und $\langle \psi(x + y), x + y \rangle$.)

Aufgabe 3. Sei $A \in M(n, n, \mathbb{C})$.

(i) Zeigen Sie, dass -1 keine Eigenwerte von A^*A ist.

(ii) Sei $I \in M(n, n, \mathbb{C})$ die Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass die Matrix $I + A^*A$ invertierbar ist. (Hinweis : A^*A ist diagonalisierbar (warum?)).