Aufgabe 1. (i) Sei $W = \mathbb{C}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Geben Sie eine Orthonormalbasis von $\operatorname{Span}\{(i,1,0),(1,0,-i)\} \subset W$.

(ii) Sei $V = \mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Geben Sie eine Orthonormabasis von $\{(1,1,1,-1)\}^\perp \subset V$.

Aufgabe 2. Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer Raum, und $U \subset V$ ein Unterraum. Sei $u_1, \dots, u_n$ eine Orthonormalbasis von U. Sei $\pi \colon V \to V$ die sogennante *orthogonale Projektion auf* U definiert durch

$$\pi(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i.$$

(i) Zeigen Sie : π ist linear und $\pi^2 = \pi$. Beschreiben Sie die Mengen $\ker \pi$ und $\operatorname{im} \pi$ (in Bezug auf U). Zeigen Sie, dass π unabhängig der Wahl der Basis $u_1, \dots, u_n$ ist.

(ii) Geben Sie die Matrix von π in der Standardbasis, falls $V = \mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt und $U = \operatorname{Span}\{(0,1,-1,0),(1,1,0,0)\}$.

(iii) Sei $v \in V$. Zeigen Sie : $\pi(v)$ ist der einzige Vektor $u_0 \in U$ sodass

$$\|v - u_0\| = \min_{u \in U} \|v - u\|.$$

(iv) Zeigen Sie, dass es eine eindeutige lineare Abbildung $\sigma \colon V \to V$ mit $\sigma|_U = \operatorname{id}_U$ und $\sigma|_{U^\perp} = -\operatorname{id}_{U^\perp}$ existiert (die sogennate *Spiegelung an* U). Zeigen Sie:

$$\forall v \in V, \quad \|\sigma(v)\| = \|v\|,$$

und Schreiben Sie σ als Polynom in π.

Aufgabe 3. Sei E die Menge aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{R}$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 < \infty$.

(i) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Folge

$$(x_n + \lambda y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

in E liegt. Definieren Sie eine $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf E.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n$$

ein Skalarprodukt auf E definiert.

(iii) Sei $S \subset E$ die Menge aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sodass die Menge $\{n \in \mathbb{N} | x_n \neq 0\}$ endlich ist. Zeigen Sie, dass $(S^\perp)^\perp \neq S$.