Aufgabe 1. Sei R ein euklidischer Ring und $A = (a_{ij}) \in M(m, n; R)$. Wir bringen A in Smith-Normalform $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_r)$ mit $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_r$ und $r = \min\{m, n\}$. Zeigen Sie, dass $d_1 = \operatorname{ggT}(a_{ij} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ gilt.

Aufgabe 2. Sei G eine abelsche Gruppe mit $|G| = 16$ und $H \subset G$ eine Untergruppe, sodass $G/H \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ gilt. Was sind die mögliche Isomorphieklassen für G? (Geben Sie ein explizites Repräsentantensystem.)

Aufgabe 3. Wie viele Isomorphieklassen von abelschen Gruppen G mit $|G| = 400$ gibt es?

Aufgabe 4. Sei R ein Integritätsbereich, sodass jeder endlich erzeugte R-Modul zu $(R/d_1R) \times \cdots \times (R/d_lR) \times (R^r)$ isomorph ist, mit $r \in \mathbb{N}_0$, $d_i \in R$ und $d_1 \mid \cdots \mid d_l$. Zeigen Sie, dass R ein Hauptidealbereich ist.

Aufgabe 5. Eine endliche Gruppe heißt *zyklisch*, falls sie von einem einzelnen Element erzeugt wird.

(i) Zeigen Sie: eine endliche Gruppe G ist genau dann zyklisch, wenn sie zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für eine $n \in \mathbb{N}$ isomorph ist.

(ii) Sei p eine Primzahl und G eine endliche abelsche Gruppe sodass $|G| = p^m$ Elemente für eine $m \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass G nur eine Untergruppe H sodass $|H| = p$ besitzt. Zeigen Sie, dass G zyklisch ist.

(iii) Sei G eine endliche albelsche Gruppe, die die folgende Eigenschaft erfüllt: für jede $n \in \mathbb{N}$ gibt es höchstens n Elemente $g \in G$ sodass $n \cdot g = 0$. Zeigen Sie, dass G zyklisch ist.