Aufgabe 1. Sei $R \neq 0$ ein kommutativer Ring mit Eins, und $R^m \to R^n$ ein surjektiver Homomorphismus von R-Moduln. Zeigen Sie, dass $m \geq n$ gilt.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring mit Eins, und M, N, P drei R-Moduln.

(i) Definieren Sie eine R-Modul Struktur auf die Menge $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ aller Homomorphismen von R-Moduln $M \to N$.

(ii) Geben Sie Isomorphismen von R-Moduln

$$\mathrm{Hom}_R(R, M) \simeq M,$$

$$\mathrm{Hom}_R(M \oplus N, P) \simeq \mathrm{Hom}_R(M, P) \oplus \mathrm{Hom}_R(M, P),$$

$$\mathrm{Hom}_R(P, M \oplus N) \simeq \mathrm{Hom}_R(P, M) \oplus \mathrm{Hom}_R(P, N).$$

(iii) Gibt es einen Isomorphismus $\mathrm{Hom}_R(M, R) \simeq M$?

Aufgabe 4. Sei R ein Ring mit Eins. Ein R-Modul $M \neq 0$ heißt *einfach*, falls 0 und M die einzige Untermoduln von M sind.

(i) Welche Moduln sind einfach, falls $R = K$, $R = \mathbb{Z}$, oder $R = K[X]$ (wobei K ein Körper ist)?

(ii) Seien M, N zwei einfache R-Moduln. Zeigen Sie, dass jeder Homomorphismus von R-Moduln $M \to N$ entweder null oder ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 5. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

(i) Seien $\varphi\colon Q \to M$ und $\psi\colon M \to Q$ zwei Homomorphismen von R-Moduln, sodass $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_M$ gilt. Zeigen Sie: $Q \simeq M \oplus (\ker \varphi)$.

(ii) Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Zeigen Sie, dass folgende Aussage äquivalent sind:

  (a) Es existiert einen R-Modul N, so dass der R-Modul $M \oplus N$ frei von endlichen Rang ist.

  (b) Für jeden surjektiven Homomorphismus von R-Moduln $\varphi\colon Q \to M$ existiert es einen Homomorphismus von R-Moduln $\psi\colon M \to Q$ sodass $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_M$ gilt.