Lineare Algebra II – 10. Tutoriumsblatt

---

1. Finden Sie eine Lösung $a \in \mathbb{Z}$ zu

$$\begin{aligned} a &\equiv 2 \mod 3 \\ a &\equiv 1 \mod 4 \\ a &\equiv 3 \mod 5. \end{aligned}$$

2. Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ mit $\operatorname{grad} f \in \{2, 3\}$. Zeigen Sie

$$f \text{ ist irreduzibel} \iff f \text{ hat keine Nullstelle in } K.$$

   Gilt die Aussage auch, wenn $\operatorname{grad} f \geq 4$? Beweis oder Gegenbeispiel.

3. Sei R ein Euklidischer Ring. Wir werden demnächst in der Vorlesung sehen, dass R dann auch ein Hauptidealbereich ist. Insbesondere existiert also für $a, b \in R$, $b \neq 0$, ein größter gemeinsamer Teiler, und es gilt $aR + bR = \operatorname{ggT}(a, b)R$.

   (a) Seien $q, r \in R$, sodass $a = qb + r$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{ggT}(a, b) = \operatorname{ggT}(b, r)$.

   (b) Beschreiben Sie einen Algorithmus, der $\operatorname{ggT}(a, b)$ durch Divisionen mit Rest bestimmt.

   (c) Bestimmen Sie $\operatorname{ggT}(4001, 2689)$.

   (d) Finden Sie $x, y \in \mathbb{Z}$, sodass

$$4001x + 2689y = \operatorname{ggT}(4001, 2689).$$

4. Wir zeigen, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist. Sei R ein endlicher Integritätsbereich, d.h. ein Integritätsbereich mit endlich vielen Elementen. Zeigen Sie:

   (a) Sei $r \in R$. Dann gibt es $m \neq n \in \mathbb{N}$ mit $r^m = r^n$.

   (b) Sei $r \in R$. Dann ist $r = 0$ oder r invertierbar.

   Alternativ kann man das Resultat auch wie folgt beweisen: sei $r \in R$, $r \neq 0$.

   (c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f_r : R \to R$, $s \mapsto rs$ surjektiv ist.

   (d) Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.