Christopher Frei	Lineare Algebra II	
Olivier Haution	Tutoriumsblatt 1	15.04.2015

Aufgabe 1. (i) (Satz des Pythagoras) Sei V ein euklidischer Vektorraum, und $v \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ die Norm. Sei $u, v \in V$. Zeigen Sie : u ist genau dann zu v orthogonal, wenn

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2.$$

(ii) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $b_i \colon V \times V \to \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2\}$ zwei positiv definite symmetrische Bilinearformen. Wir nehmen an, dass die zugehörige Normen übereinstimmen :

$$\forall v \in V, \quad \sqrt{b_1(v, v)} = \sqrt{b_2(v, v)}.$$

Zeigen Sie : $b_1 = b_2$.

Aufgabe 2. Sei $V = \mathbb{R}^4$ mit dem standard Skalarprodukt

$$\langle (x, y, z, t), (x', y', z', t')\rangle = xx' + yy' + zz' + tt'.$$

Geben Sie einen Basis des Orthogonalraumes zum Vektor $(1, 2, -1, 1)$

Aufgabe 3. Die Spur eines Matrix $C = (c_{i,j}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ist

$$Tr(C_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $(A, B) \mapsto Tr({}^tAB)$ ein Skalarprodukt auf $M_{m,n}(\mathbb{R})$ definiert.

Aufgabe 4. Sei k ein Körper und

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(k).$$

(i) Finden Sie die Eigenwerte und Eigenräume von M falls $k = \mathbb{R}$ und $k = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(ii) Ist M diagonalisierbar, bzw. trigonalisierbar, falls $k = \mathbb{R}$, $k = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, und $k = \mathbb{C}$?