Lineare Algebra II – 9. Übungsblatt

(Abgabe bis 21.6.2016)

---

1. Sei R ein Ring. Sei $M(n,n;R)$ die Menge der $(n \times n)$-Matrizen $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, mit $a_{ij} \in R$. Zeigen Sie:

   (a) $M(n,n;R)$ bildet mit der (für Körper bereits bekannten) Addition und Multiplikation von Matrizen einen Ring.

   (b) Wenn R ein Ring mit Eins ist, dann auch $M(n,n;R)$.

   (c) Sei $n \geq 2$ und R ein Ring mit Eins. Wenn $M(n,n;R)$ kommutativ ist, dann folgt $R = \{0\}$.

   (3 Punkte)

2. (a) Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass jedes Ideal im Polynomring $K[X]$ ein Hauptideal ist.

   (b) Zeigen Sie, dass die Menge

   $$(2, X) = 2\mathbb{Z}[X] + X\mathbb{Z}[X] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mid n \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{Z}, 2 \mid a_0\} \subset \mathbb{Z}[X]$$

   ein Ideal im Polynomring $\mathbb{Z}[X]$ ist.

   (c) Zeigen Sie, dass $(2, X)$ kein Hauptideal in $\mathbb{Z}[X]$ ist.

   (3 Punkte)

3. Sei K ein Körper und $0 \neq f \in K[X]$ ein Polynom.

   (a) Zeigen Sie, dass der Ring $K[X]/(fK[X])$ ein K-Vektorraum der Dimension $\operatorname{grad} f$ ist.

   (b) f heißt *irreduzibel*, wenn $\operatorname{grad} f > 0$ und für $g, h \in K[X]$ gilt

   $$f = g \cdot h \Rightarrow \operatorname{grad} g = 0 \text{ oder } \operatorname{grad} h = 0.$$

   Zeigen Sie, dass f genau dann irreduzibel ist, wenn $K[X]/(fK[X])$ ein Körper ist.

   (3 Punkte)

4. Sei R ein Ring und A, B, C Ideale von R. Wir definieren

   $$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}, \quad AB := \{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in A, b_i \in B\}.$$

   Zeigen Sie:

(a) $A + B$ und AB sind Ideale von R,

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$,

(c) $A(BC) = (AB)C$,

(d) $A(B + C) = AB + AC$ und $(A + B)C = AC + BC$.

(3 Punkte)